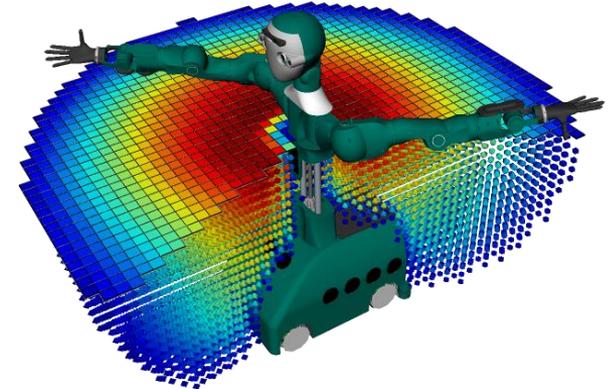
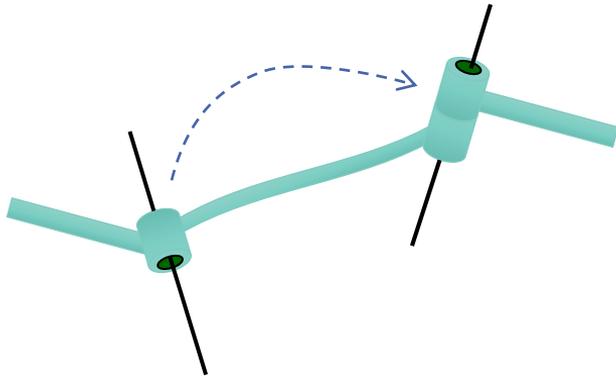


Robotik I: Einführung in die Robotik

Kapitel 2 – Kinematik

Tamim Asfour

<http://www.humanoids.kit.edu>



Robotermodelle

■ Kinematische Modelle

Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der **Bewegungszustände mechanischer Systeme**

■ Dynamische Modelle

Dynamik: Untersuchung der **Bewegung von Körpern** als Folge der auf sie wirkenden **Kräfte und Momente**

■ Geometrische Modelle

Geometrie: Mathematische Beschreibung der **Form von Körpern**

Kinematisches Modell

Kinematische Kette

Denavit-Hartenberg Konvention

Direktes Kinematisches Problem

Beispiele

Jacobi-Matrix

Singularitäten und Manipulierbarkeit

Repräsentation der Erreichbarkeit

Geometrisches Modell

Einsatzbereiche

Klassifizierung

Beispiele

Inhalt

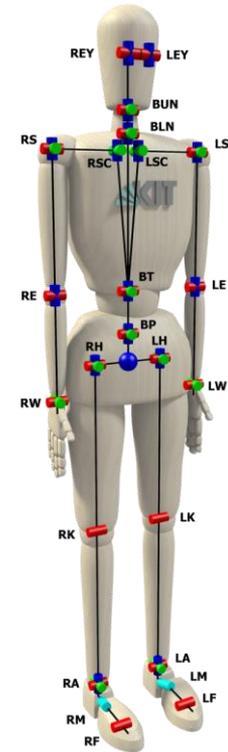
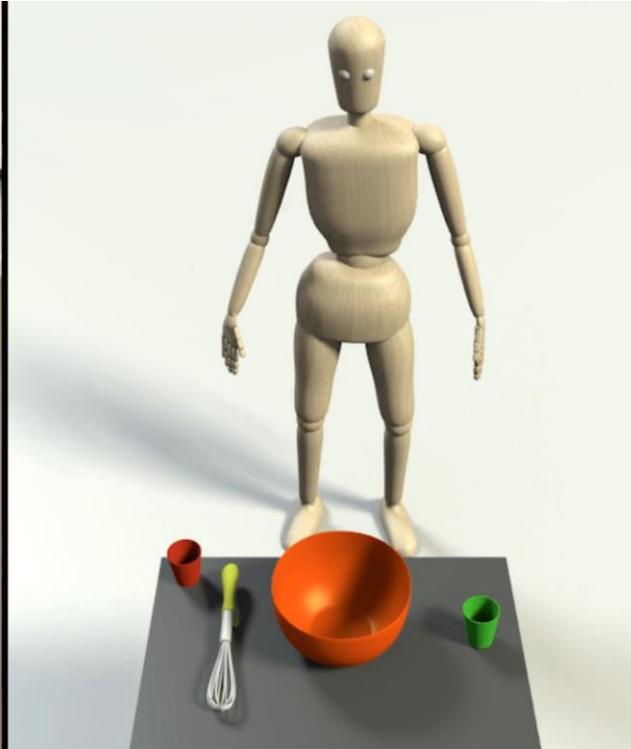
■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrix
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

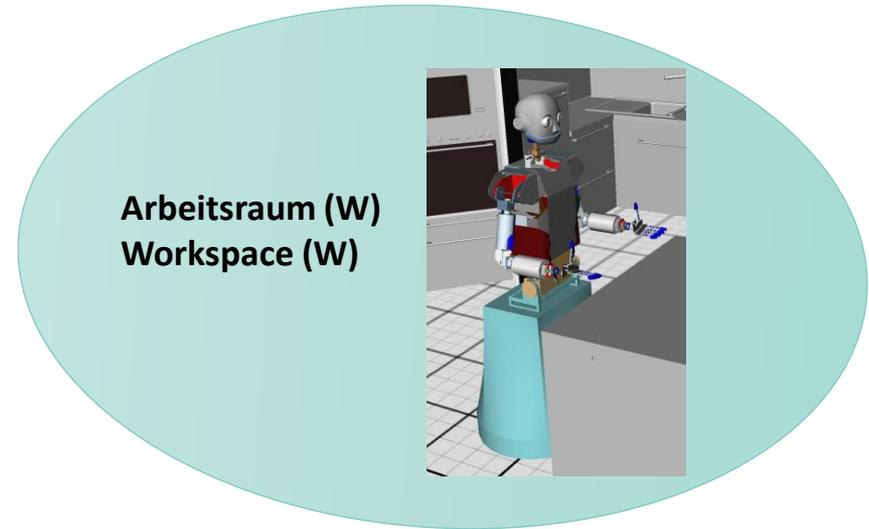
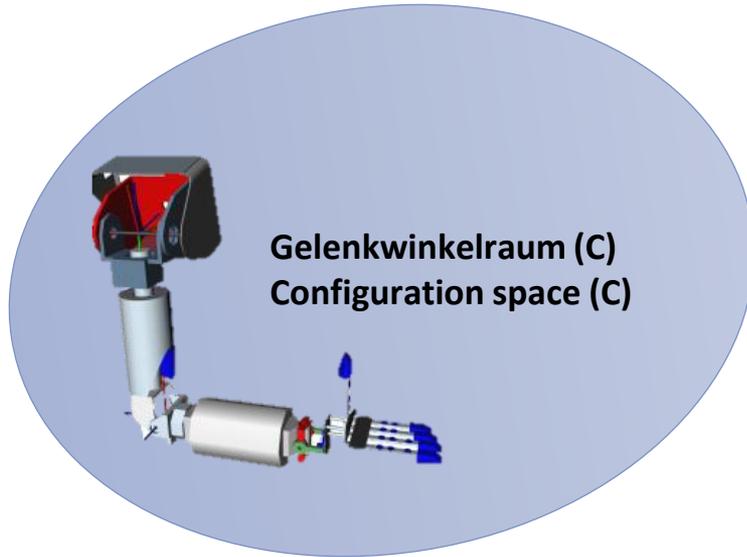
- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Kinematisches Modell (1)



Kinematisches Modell (2)

Zwei Räume



Kinematisches Modell (3)

■ Definition

- Das **kinematische Modell** eines Roboters beschreibt die Zusammenhänge zwischen dem **Gelenkwinkelraum** (Roboterkoordinaten, Konfigurationsraum) und dem **Posenraum des Endeffektors** in Weltkoordinaten (Arbeitsraum, Kartesischer Raum).

■ Einsatzbereiche

- Zusammenhang zwischen **Gelenkwinkeln** und **Posen** des Endeffektors
- **Erreichbarkeitsanalyse**
- Relation zwischen **Körpern des Roboters** (Selbstkollision)
- Relation zur **Umgebung** (Kollisionserkennung)

Vorwärtskinematik

- **Direktes** kinematisches Problem
 - Eingabe: Gelenkwinkelstellungen des Roboters
 - Ausgabe: **Pose des Endeffektors**

Direkte Kinematik:
HIER!

Endeffektor

Wo ist meine
Hand?

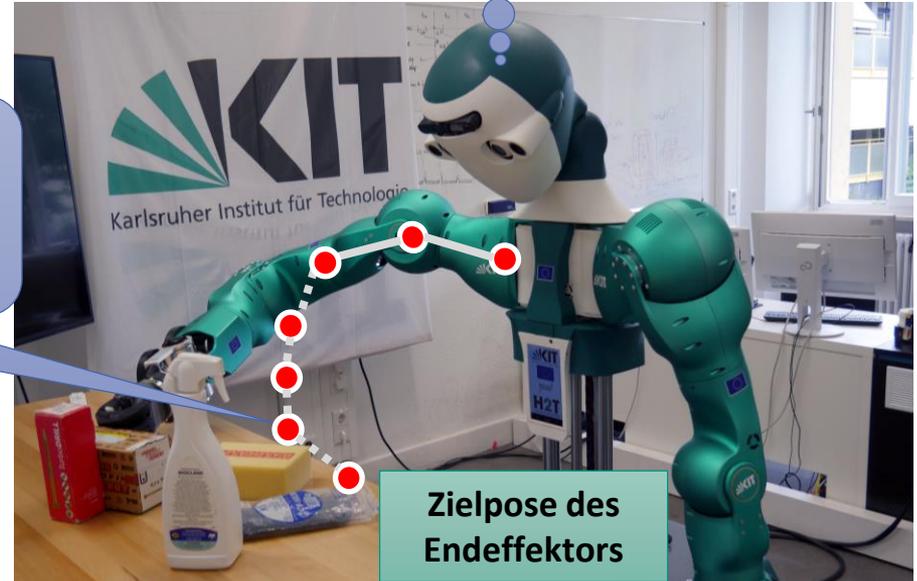


Inverse Kinematik

- **Inverses** kinematisches Problem
 - Eingabe: Zielpose des Endeffektors
 - Ausgabe: **Gelenkwinkelstellungen**

**Inverse Kinematik:
Bestimmt die Gelenkwinkel**

**Wie bewege ich meine
Hand zum Ziel?**



Übersicht: Direkte und Inverse Kinematik

Gelenkwinkel
(Konfigurationsraum)

Transformation

Kartesische Koordinaten
(Arbeitsraum)

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Direkte Kinematik

$$\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta})$$

Inverse Kinematik

$$\boldsymbol{\theta} = f^{-1}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^m$$

z. B. Position und
Orientierung des
Endeffektors

$$\mathbf{x}_{EEF} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

n : Bewegungsfreiheitsgrade
 m : Freiheitsgrade

Inhalt

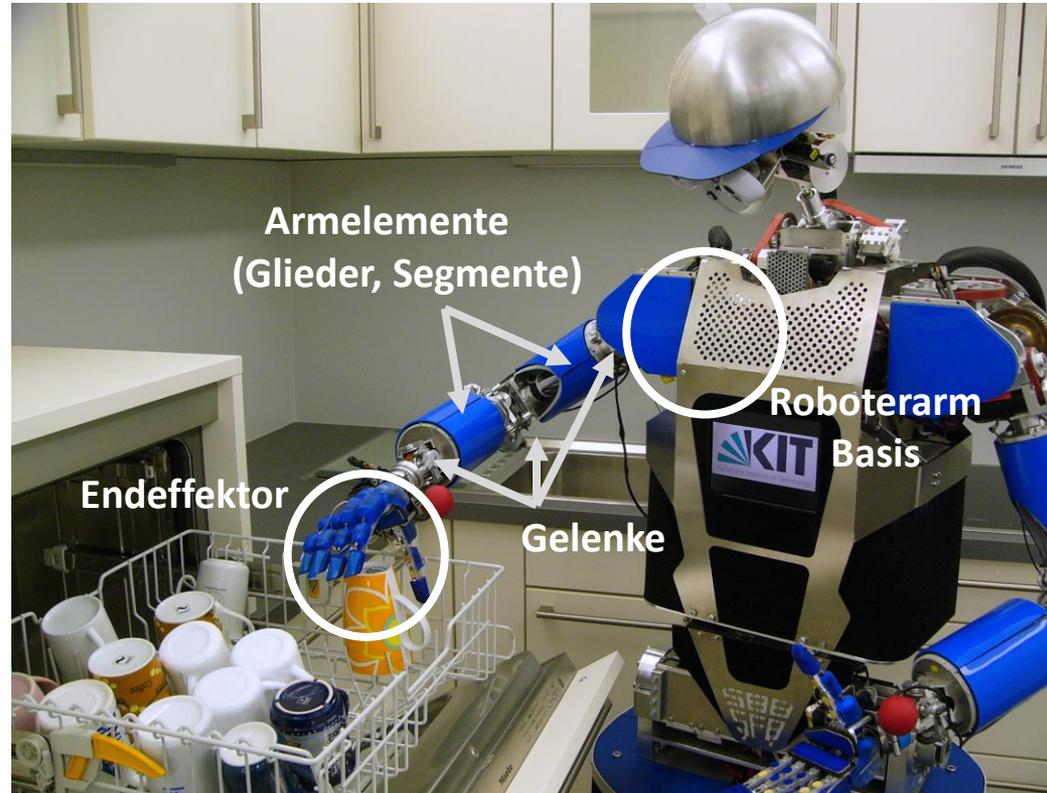
■ Kinematisches Modell

- **Kinematische Kette**
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Elemente einer Kinematischen Kette

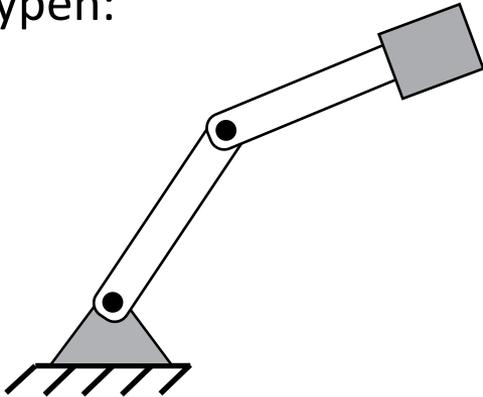


Kinematische Kette: Definition

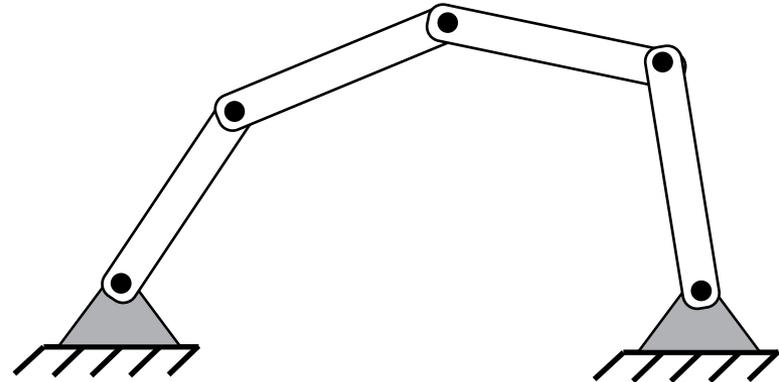
■ Definition:

Eine kinematische Kette wird von **mehreren Körpern** gebildet, die durch **Gelenke kinematisch verbunden** sind (z. B. Roboterarm).

■ Typen:



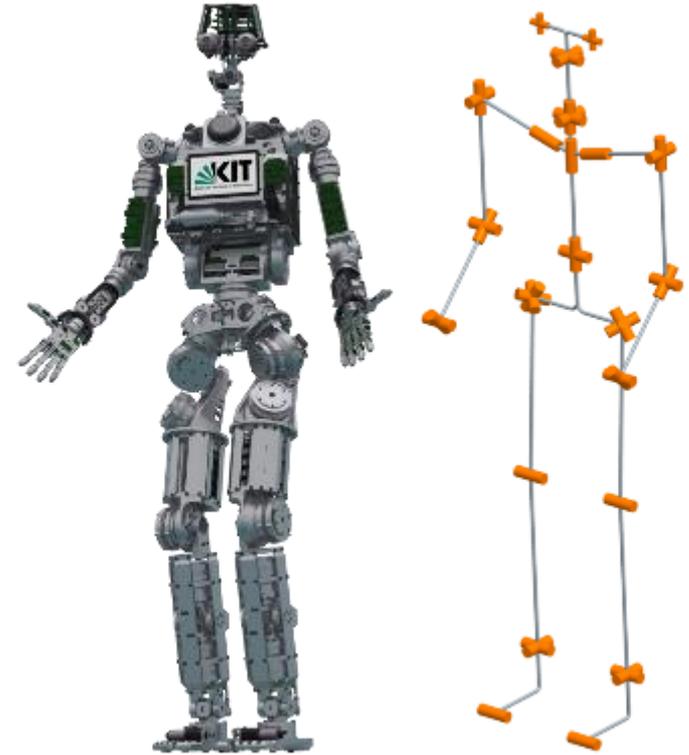
Offene kinematische Kette



Geschlossene kinematische Kette

Kinematische Kette: Konventionen

- Jedes **Armelement** entspricht einem **starr**en Körper.
- Jedes Armelement ist mit dem nächsten durch ein **Gelenk** verbunden.
- Bei Schub- und Rotationsgelenken: Jedes **Gelenk** hat nur **einen Bewegungsfreiheitsgrad** (Rotation oder Translation).
- **Kinematische Parameter:**
 - Gelenkdefinition (z.B. Rotationsachse)
 - Transformation zwischen den Gelenken



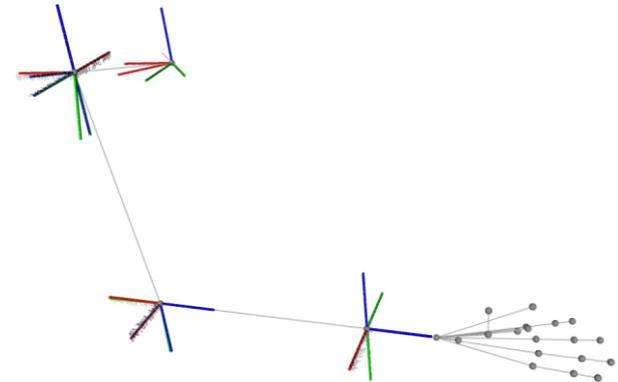
Kinematische Parameter

■ Gelenkparameter

- Rotationsgelenk: Rotationsachse
- Schubgelenk: Translationsrichtung
- ...

■ Spezifikation der **Lage der Gelenke zueinander**

- Feste Transformation zwischen zwei Gelenken
- Definiert die lokalen Koordinatensysteme der Gelenke
- Transformation von Gelenk $i - 1$ zu Gelenk i durch Transformationsmatrix ${}^{i-1}T_i$



Anzahl Parameter der kinematischen Kette

- Für jedes Glied muss eine **Transformation** bestimmt werden:
 - 3 Rotationsparameter
 - 3 Translationsparameter

→ **6 Parameter** pro Glied der kinematischen Kette

Inhalt

■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- **Denavit-Hartenberg Konvention**
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Denavit-Hartenberg (DH) Konvention

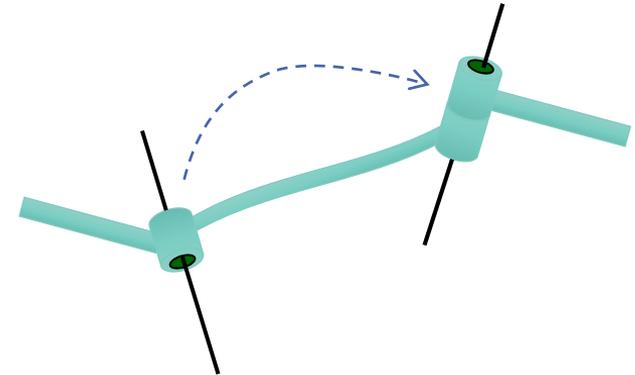
■ Ziel: **Reduktion der Parameter** zur Beschreibung eines Armelementes

■ Eigenschaften

■ Systematische Beschreibung der Beziehungen (**Translationen** und **Rotationen**)
zwischen benachbarten Gelenken

■ Reduktion der Anzahl **Parameter von 6 auf 4**

■ Beschreibung mit homogene Matrizen



Literatur: Denavit, Hartenberg: „A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices“,
Journal of Applied Mechanics, 1955, vol 77, pp 215-221

DH Konvention für Wahl der Koordinatensysteme

■ Jedes Koordinatensystem wird auf Basis der folgenden drei Regeln bestimmt:

1. Die z_{i-1} -Achse liegt entlang der **Bewegungsachse** des **i -ten Gelenks**.
2. Die x_i -Achse verläuft entlang der gemeinsamen **Normalen** (*common normal*) von z_{i-1} und z_i (Richtung über Kreuzprodukt: $x_i = z_{i-1} \times z_i$).
3. Die y_i -Achse vervollständigt das Koordinatensystem entsprechend der **Rechte-Hand-Regel**.

$$i \in \{\text{Basis}, 1, \dots, n\}$$

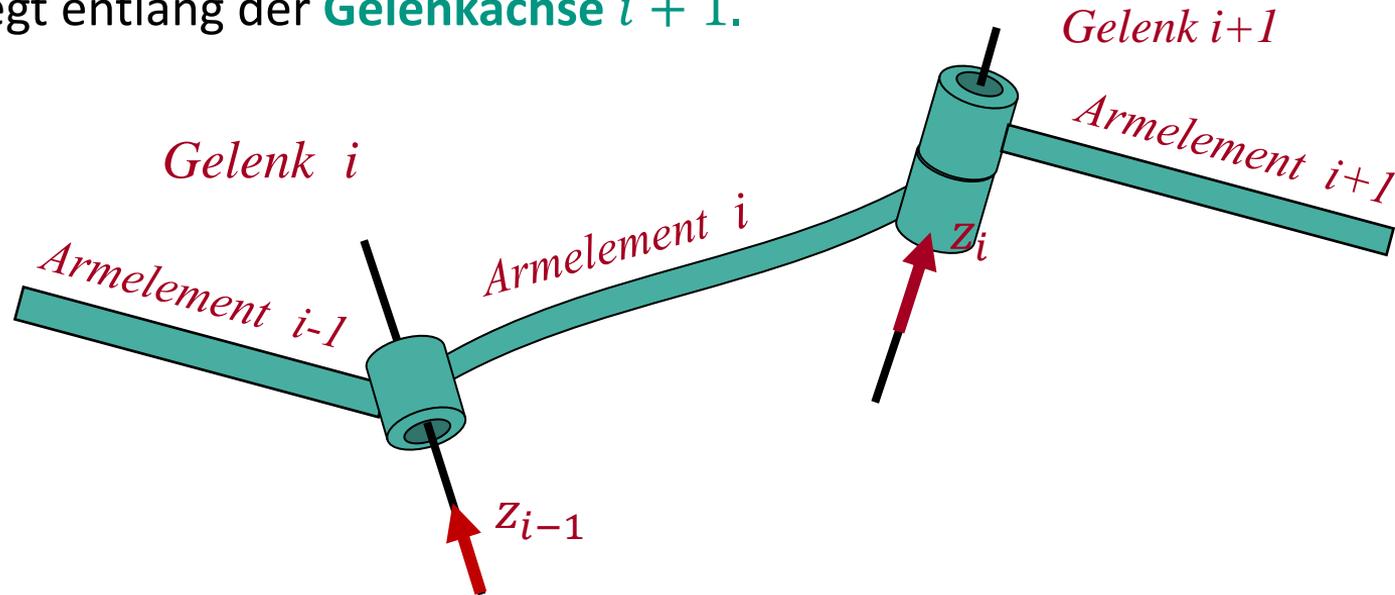
→ Herleitung der Parameter für Armelement und Gelenke

■ Anmerkung

- In der Literatur finden sich auch andere Varianten der DH-Konvention
- In dieser Vorlesung betrachten wir die modifizierte Variante von Waldron und Paul

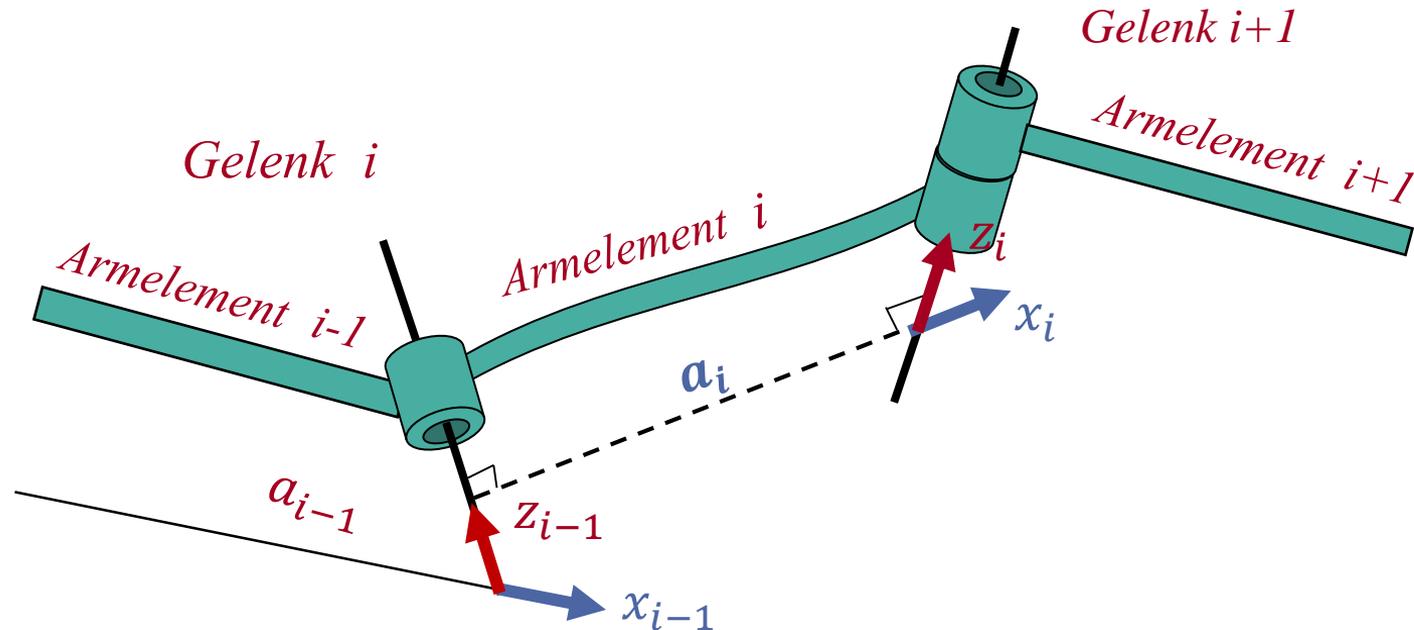
DH-Konvention: Parameter des Armelements (1)

- Jedes **Armelement** i ist durch zwei begrenzende **Gelenke** i und $i + 1$ eingebunden.
- z_i liegt entlang der **Gelenkachse** $i + 1$.



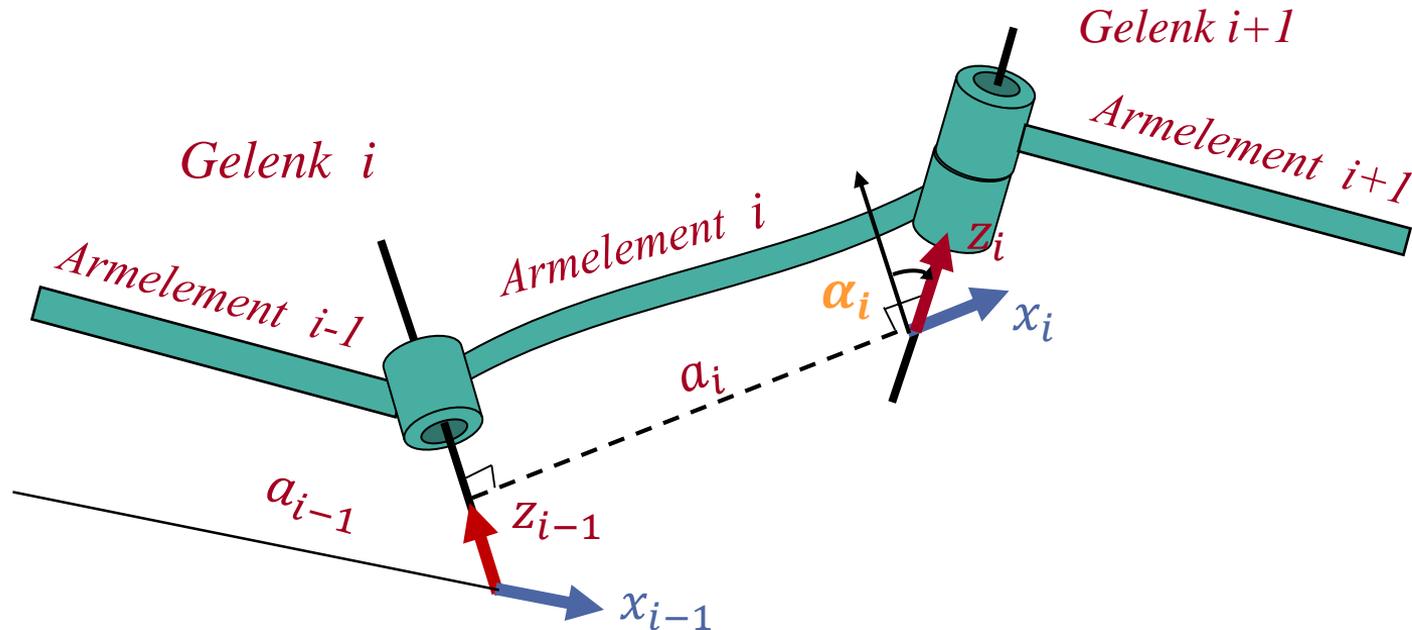
DH-Konvention: Parameter des Armelements (2)

- Die **Armelementlänge** a_i beschreibt den **Abstand** von z_{i-1} zu z_i .
- x_i liegt entlang der **Normalen von z_{i-1} und z_i** (Kreuzprodukt).



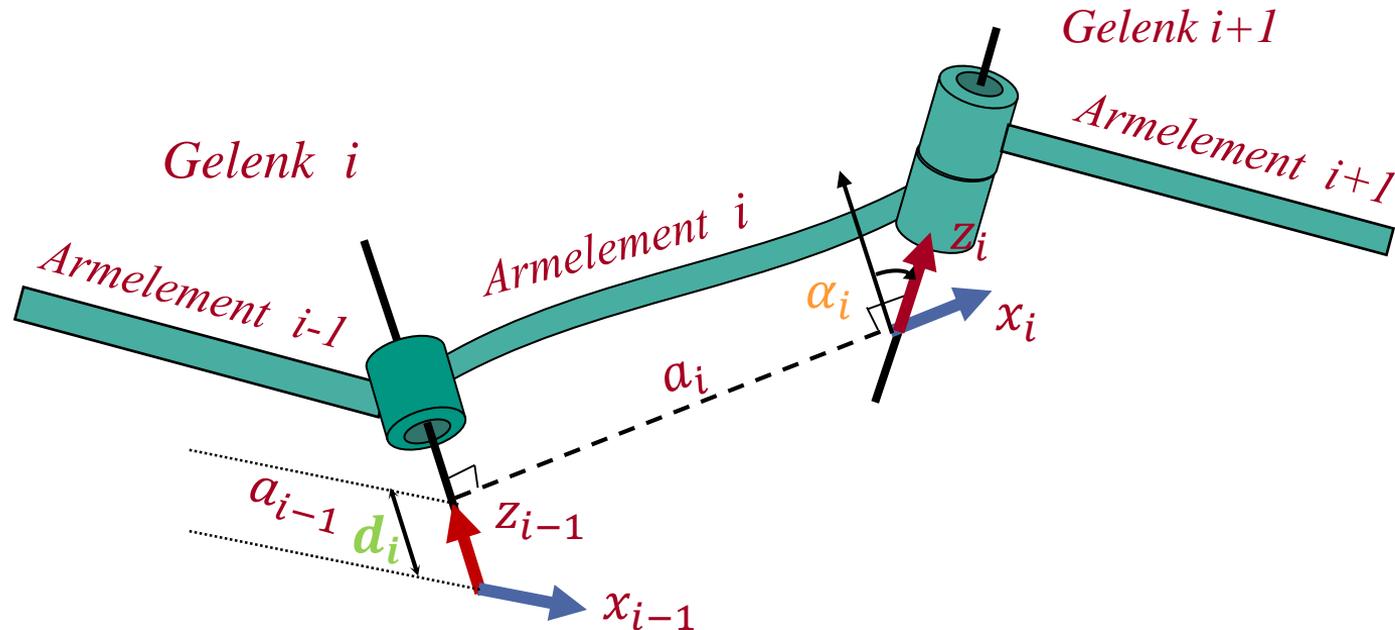
DH-Konvention: Parameter des Armelements (3)

- Die **Armelementverdrehung** α_i beschreibt den **Winkel** von z_{i-1} zu z_i **um** x_i .



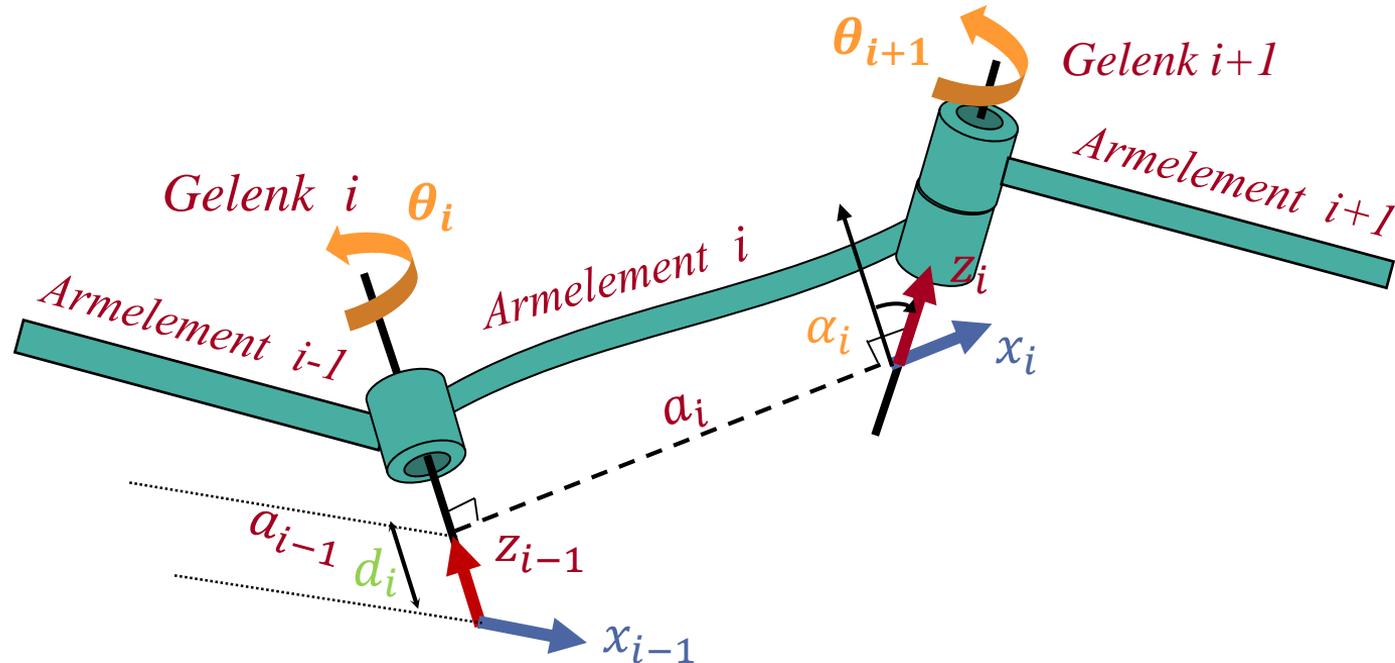
DH-Konvention: Parameter des Armelements (4)

- Der **Gelenkabstand** d_i ist der Abstand zwischen der x_{i-1} -Achse und x_i -Achse entlang der z_{i-1} Achse.



DH-Konvention: Parameter des Armelements (5)

Der **Gelenkwinkel** θ_i ist der Winkel von x_{i-1} zu x_i **um** Z_{i-1} .



DH-Parameterter

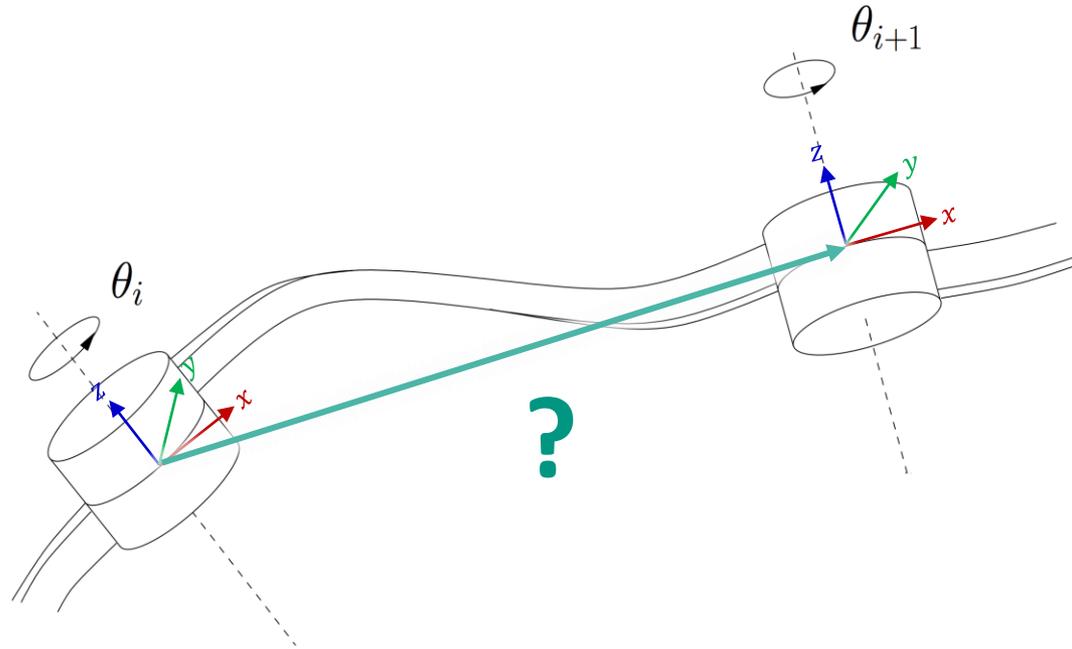
- Die vier Parameter a_i , α_i , d_i und θ_i nennt man **DH-Parameter**
- Diese beschreiben die Transformationen zwischen zwei aufeinander folgenden rotatorischen oder translatorischen Robotergelenken



Denavit-Hartenberg Parameter: DH-Parameter

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Armelementlänge	a	Konstant	Konstant
Verdrehung	α	Konstant	Konstant
Gelenkabstand	d	Konstant	Variabel
Gelenkwinkel	θ	Variabel	Konstant

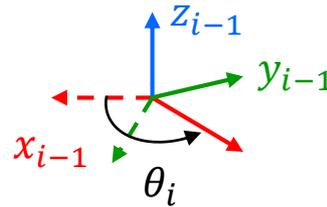
Transformation zwischen zwei Robotergelenken



DH-Transformationsmatrizen (1)

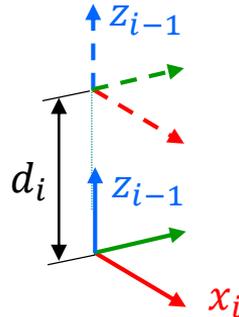
Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

1. Eine **Rotation** θ_i um die z_{i-1} -**Achse**, damit die x_{i-1} -Achse parallel zur x_i -Achse liegt.



$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eine **Translation** d_i entlang der z_{i-1} -**Achse** zu dem Punkt, wo sich z_{i-1} und x_i schneiden.

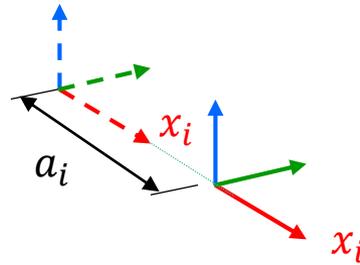


$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DH-Transformationsmatrizen (2)

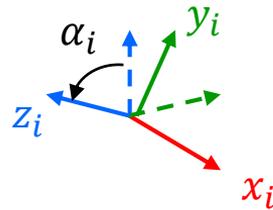
Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

3. Eine **Translation** a_i entlang der x_i -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen.



$$T_{x_i}(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Eine **Rotation** α_i um die x_i -Achse, um die z_{i-1} -Achse in die z_i -Achse zu überführen.



$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DH-Transformationsmatrizen (3)

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i} &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Inverse DH-Transformation

Transformation OKS_i zu OKS_{i-1}

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i}^{-1} &= A_{i,i-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -d_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cdot \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & u_x \\ n_y & o_y & a_y & u_y \\ n_z & o_z & a_z & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T \mathbf{u} \\ o_x & o_y & o_z & -o^T \mathbf{u} \\ a_x & a_y & a_z & -a^T \mathbf{u} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siehe Kapitel 1

Verkettung von DH-Transformationen

- Durch Verkettung der DH-Matrizen lässt sich die Lage der einzelnen **Koordinatensysteme bezüglich** des **Bezugskoordinatensystems** bestimmen.
- Lage des m -ten Koordinatensystems bezüglich der Basis:

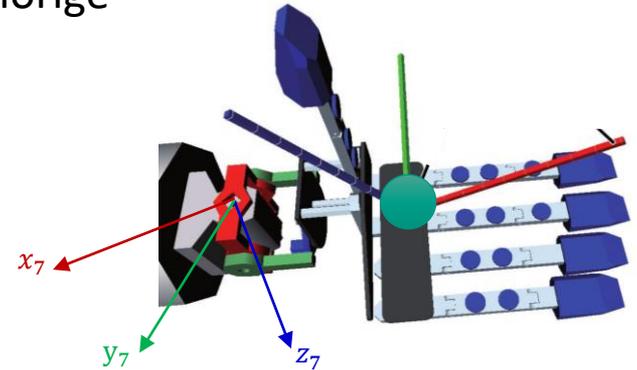
$$\begin{aligned} S_{\text{Basis},m}(\boldsymbol{\theta}) &= A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{m-2,m-1}(\theta_{m-1}) \cdot A_{m-1,m}(\theta_m) \\ &= \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Das ist eine Abbildung des Konfigurationsraumes $C \subset \mathbb{R}^n$ auf den Arbeitsraum $W \subset \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$$

DH-Parameter – Hinweise

- Die **vier Parameter** a_i , α_i , d_i und θ_i nennt man **DH-Parameter**
- **Wichtig:** Bezugskoordinatensystem (BKS) und Endeffektor-Koordinatensystem (EKS) der kinematischen Kette
 - So intuitive wie möglich; So festlegen, dass die zugehörige DH-Parameter einfach sind (möglichst null)
 - BKS als Koordinatensystem des ersten Gelenks in der Nullposition
 - Endeffektor-Koordinatensystem an einem „wichtigen Referenzpunkt“ im Endeffektor



Zusammenfassung: Bestimmung der DH Parameter

1. **Skizze** des Manipulators
2. Identifiziere und **nummeriere** die **Gelenke** (1, Letztes Glied = n)
3. Zeichne die **Achsen z_{i-1}** für **jedes Gelenk i**
4. Bestimme die **Parameter a_i** zwischen z_{i-1} und z_i
5. Zeichne die **x_i –Achsen**
6. Bestimme die **Parameter α_i** (Verdrehung um die x_i -Achsen)
7. Bestimme die **Parameter d_i** (Gelenkabstand)
8. Bestimme die **Winkel θ_i** um z_{i-1} -Achsen
9. Verknüpfe die **Gelenk-Transformation-Matrizen $A_{i-1,i}$**

Inhalt

■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- **Direktes Kinematisches Problem**
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Direktes kinematisches Problem (1)

- **Direktes** kinematisches Problem
 - Eingabe: Gelenkwinkelstellungen des Roboters
 - Ausgabe: **Pose des Endeffektors**

Wo ist meine Hand?

Direkte Kinematik:
HIER!

Endeffektor



Direktes kinematisches Problem (2)

- Aus den DH-Parametern und den Gelenkwinkeln soll die Stellung des Endeffektors (EEF) ermittelt werden.
- Die Stellung des Endeffektors (EEF) in Bezug auf das BKS ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_{Basis,EEF}(\theta) &= A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n) \\ &= \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Gelenkwinkel $\theta_1, \dots, \theta_n$ sind vorgegeben \Rightarrow **Stellung des EEF ergibt sich aus obiger Gleichung durch Einsetzen der Gelenkwinkelwerte**

Inhalt

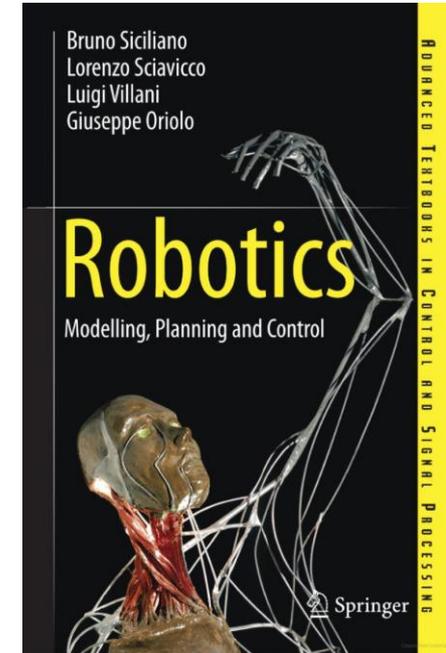
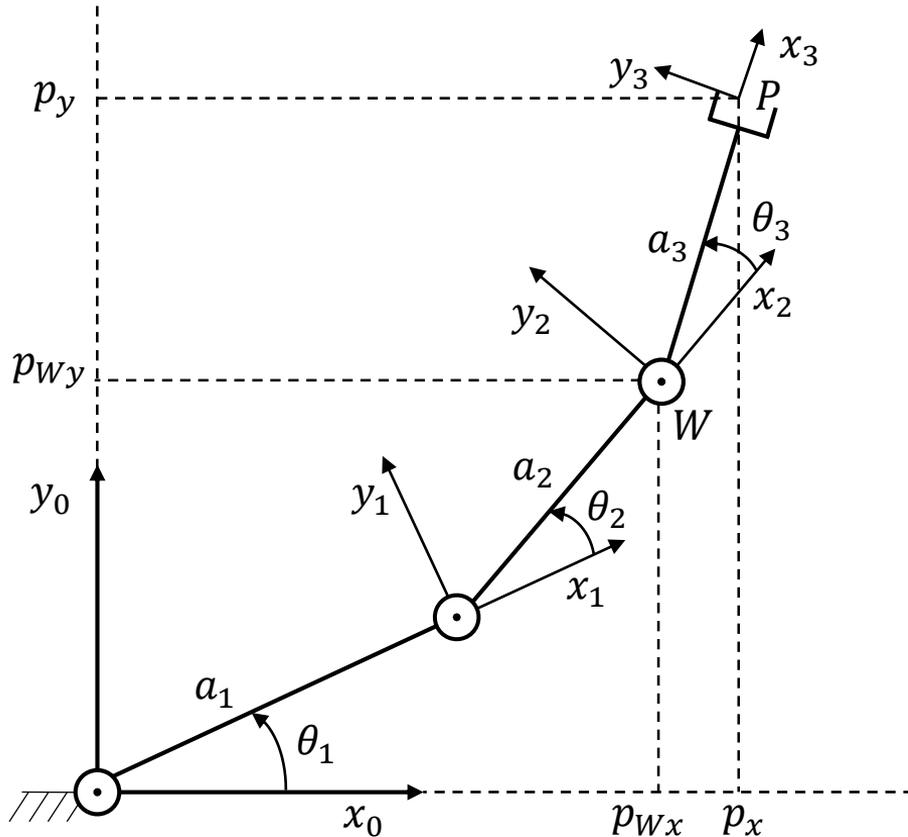
■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- **Beispiele**
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

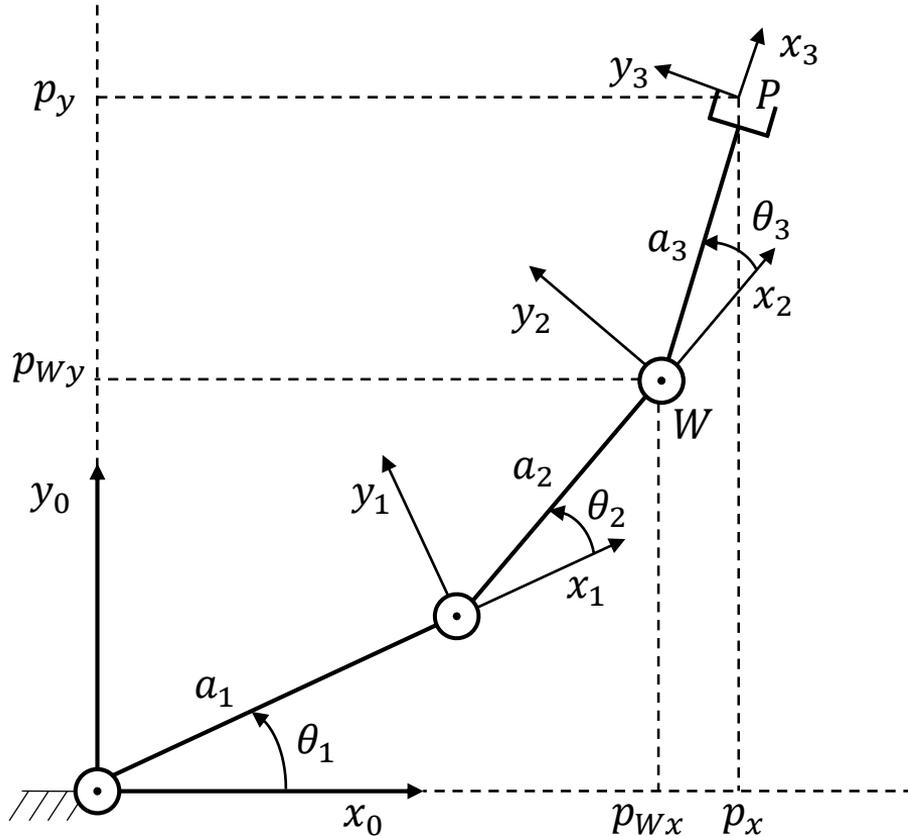
■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Beispiel 1: Planarer Roboter (in xy-Ebene)



Beispiel 1: Planarer Roboter



z-Achsen sind parallel
Keine Translation in z-Richtung

Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

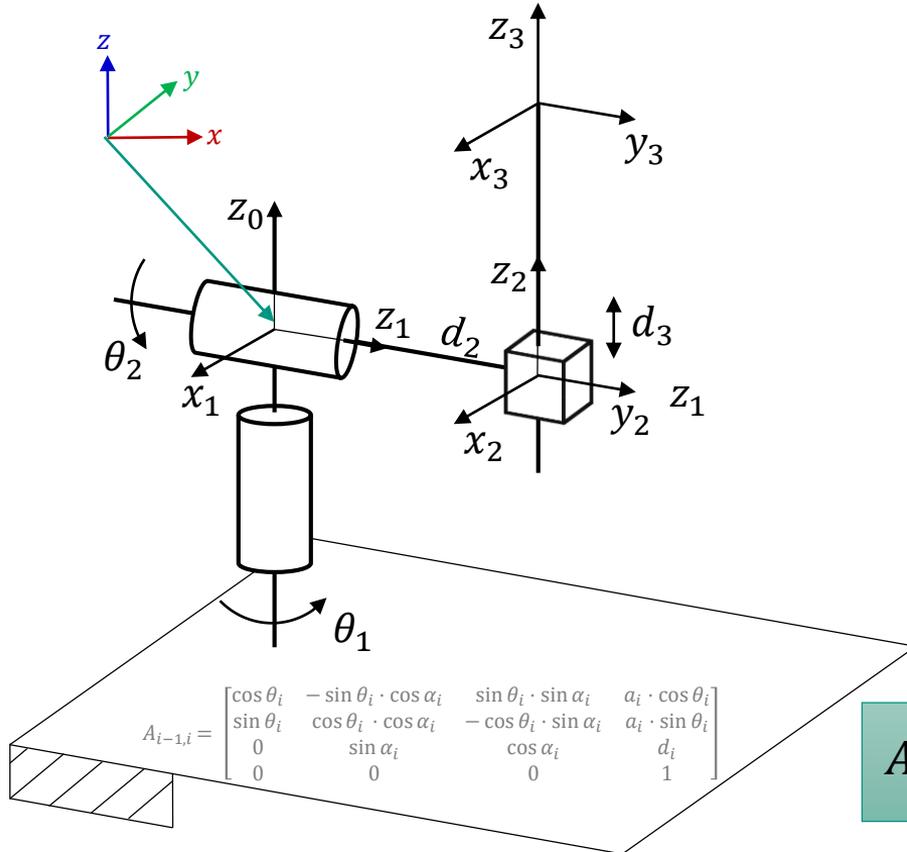
$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1: Planarer Roboter

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abkürzungen: $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Beispiel 2: 3D Roboter

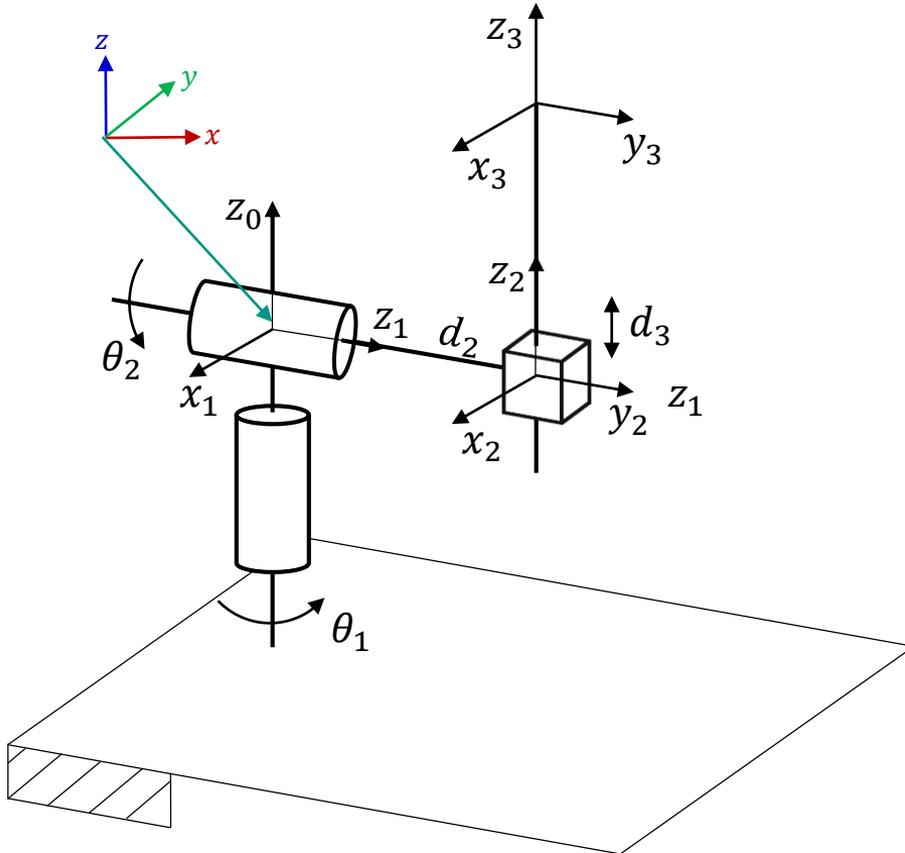


Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{i-1,i} = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i)$$

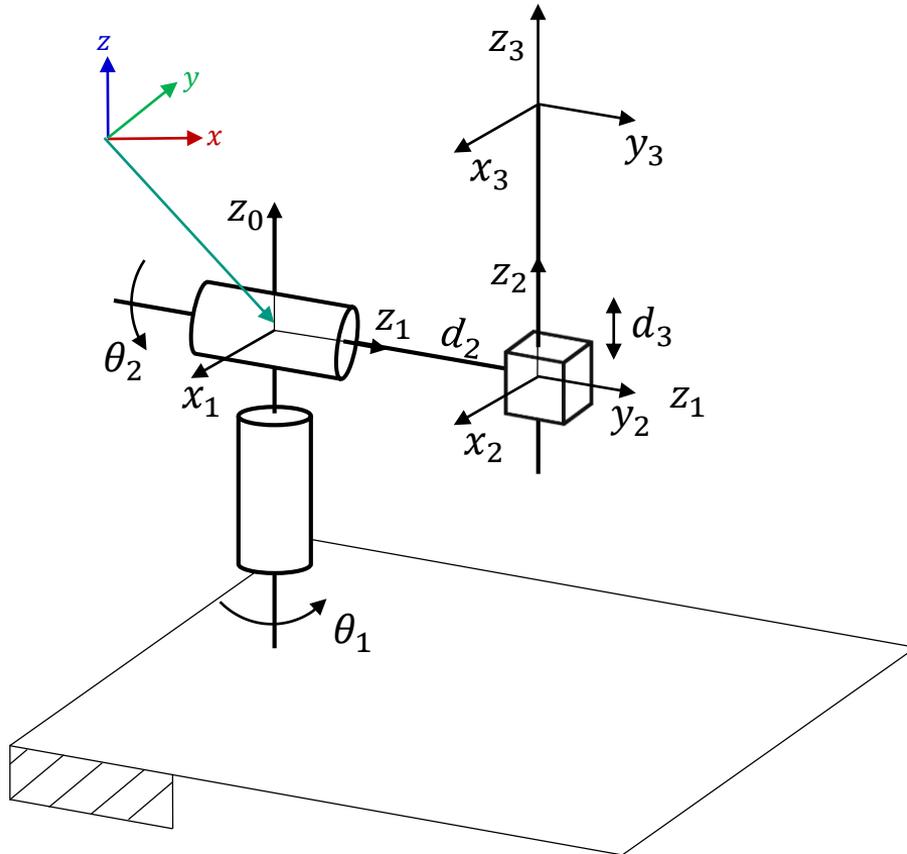
Beispiel 2: 3D Roboter



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2: 3D Roboter



Gelenk	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	θ_1
2	0	90	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

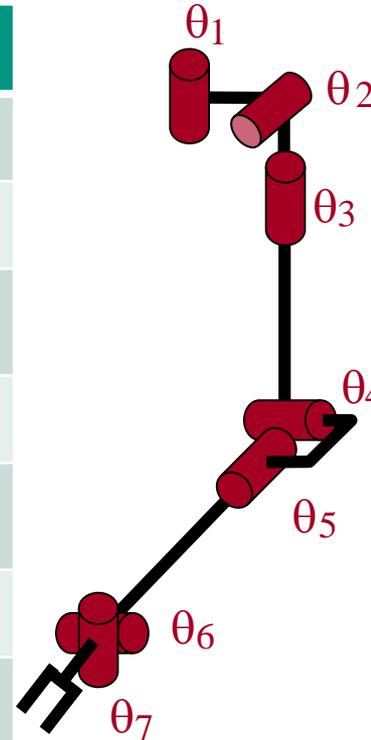
$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2: 3D Roboter

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Notation: Arm von ARMAR-I

Gelenk i	θ_i [°]	a_i [mm]	α_i [°]	d_i [mm]
1	θ_1	30	-90	0
2	$\theta_2 - 90$	0	-90	0
3	$\theta_3 + 90$	0	90	223,5
4	θ_4	0	-90	0
5	θ_5	0	90	270
6	$\theta_6 + 90$	0	-90	0
7	θ_7	140	90	0



Vorwärtskinematik (1)

■ **Gegeben:** $\theta, A_{i-1,i}(\theta)$

■ **Gesucht:** $S_{Basis,EEF}(\theta)$

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i}(\theta) &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{Basis,EEF}(\theta) &= A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n) \\
 &= \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vorwärtskinematik (2)

- Lage des Endeffektor-Koordinatensystems bezüglich der Basis:

$$S_{Basis,EEF}(\boldsymbol{\theta}) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

- Das ist eine Abbildung des Konfigurationsraumes ($C \subset \mathbb{R}^n$) auf den Arbeitsraum $W \subset \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})$$

Ableitung der Vorwärtskinematik

- Vorwärtskinematik: **Gelenkwinkelstellung** → **End-Effektor Pose**

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t))$$

Pose des EEF in W

Gelenkwinkelvektor in C

- Wie sehen verwandte Beziehungen aus?
 - Gelenkwinkelgeschwindigkeiten → Endeffektor-Geschwindigkeit
 - Drehmomente in Gelenkwinkeln → Endeffektor-Kräfte und –Momente
- **Ansatz:** Vorwärtskinematik ableiten → **Jacobi-Matrix**

Inhalt

■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- **Jacobi-Matrix**
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Erinnerung: Jacobi-Matrix

- Gegeben eine differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d.h. } \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- Die **Jacobi-Matrix** enthält sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung von f . Für ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$J_f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dabei bezeichnen f_1, \dots, f_m die Komponentenfunktionen von f und x_1, \dots, x_n die Koordinaten in \mathbb{R}^n .

Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik

- **Problem:** Vorwärtskinematik ist matrixwertig (n : Anzahl der Gelenke)

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{SE}(3)$$

⇒ Jacobi-Matrix nicht definiert

- **Lösung:** Vektorwertige Repräsentation wählen, z.B. mit Roll-Pitch-Yaw

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6 \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right.$$

End-Effektor Geschwindigkeiten

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Dann gilt für die Pose des End-Effektors $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^6$ zum Zeitpunkt t :

$$\mathbf{x}(t) = f(\theta(t))$$

- Die End-Effektor-Geschwindigkeit hängt linear von den Gelenkgeschwindigkeiten ab (**Kettenregel**):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial f(\theta(t))}{\partial t} = \frac{\partial f(\theta(t))}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

End-Effektor Geschwindigkeiten

- Die Jacobi-Matrix setzt kartesische End-Effektor-Geschwindigkeiten in Relation zu Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden:
 - **Vorwärtskinematik im Geschwindigkeitsraum:**
Gegeben die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten, welche kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit wird damit realisiert?
 - **Inverse Kinematik im Geschwindigkeitsraum:**
Gegeben eine kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit, welche Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sind notwendig, um diese zu realisieren?

Kinematik mit Hilfe der Jacobi-Matrix (I)

■ Vorwärtskinematik:

Gegeben die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}(t)$,
welche kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ wird damit realisiert?

■ Einsetzen von $\dot{\theta}(t)$:

$$\dot{x}(t) = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

Kinematik mit Hilfe der Jacobi-Matrix (II)

Inverse Kinematik:

Gegeben eine kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(t)$,
welche Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ sind notwendig, um diese zu
realisieren?

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

 $J_f^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot [\quad]$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = J_f^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$$

Kräfte und Momente am End-Effektor

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Die geleistete **Arbeit** (Kraft \times Weg) muss unabhängig vom Bezugssystem konstant bleiben (**Reibung vernachlässigt**)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- Mit:

$\dot{\theta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Gelenkgeschwindigkeiten

$\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Drehmomente in Gelenken

$\dot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$, End-Effektor-Geschwindigkeit

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$, Kraft-Momenten-Vektor am End-Effektor

Kräfte und Momente am End-Effektor

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- Die Beziehung muss für jedes Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gelten, daher:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{x}(t)^T \cdot F(t)$$

- Bekannte Beziehung zwischen End-Effektor-Geschwindigkeit und Jacobi-Matrix:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{\theta}(t)^T \cdot J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

$$\dot{x}(t) = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

- Da $\dot{\theta}(t)$ beliebig ist, folgt:

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

Kräfte und Momente am End-Effektor

- Die Jacobi-Matrix setzt Kräfte und Momente am End-Effektor in Relation zu Drehmomenten in den Gelenken

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden:
 - Gegeben Kräfte/Momente am End-Effektor, welche Drehmomente müssen in den Gelenken wirken, um dieser Kraft zu widerstehen?
 - Gegeben die Drehmomente in den Gelenken, welche Kräfte und Momente wirken dadurch am (fixierten) End-Effektor?

Recap: DH-Transformationsmatrizen

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i} &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Recap: Direkte und Inverse Kinematik

Gelenkwinkel
(Konfigurationsraum)

Transformation

Kartesische Koordinaten
(Arbeitsraum)

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Direkte Kinematik

$$\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta})$$

Inverse Kinematik

$$\boldsymbol{\theta} = f^{-1}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^m$$

z. B. Position und
Orientierung des
Endeffektors

$$\mathbf{x}_{EEF} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

n : Bewegungsfreiheitsgrade
 m : Freiheitsgrade

Recap – Jacobi-Matrix

$$\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$J_f(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^{m=6} \text{ und } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

$$J_f(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

Recap – Jacobi-Matrix

■ Geschwindigkeitsraum

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

■ Kraftraum

$$\boldsymbol{\tau}(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot \mathbf{F}(t)$$

Berechnung der Jacobi-Matrix

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix korrespondiert zu einem Gelenk θ_i der kinematischen Kette

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$J_f(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\theta}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- **Ansatz:** Die numerische Berechnung der Jacobi-Matrix verläuft **spaltenweise**

⇒ gelenkweise

Geometrische Berechnung der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{x} = f(\theta)$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{R}^{m=6} \text{ und } \theta \in \mathbb{R}^{n=6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \\ j_{31} & j_{32} \\ j_{41} & j_{42} \\ j_{51} & j_{52} \\ j_{61} & j_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = (J_1(\theta), J_2(\theta), \dots, J_6(\theta)) \cdot \dot{\theta}$$

Geometrische Berechnung der Jacobi-Matrix

1. Fall: Translationsgelenk

- **Annahme:** Das j -te Gelenk führe eine Translation in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^3$ durch.
- Dann gilt:

$$J_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

2. Fall: Rotationsgelenk

- **Annahme:** Das j -te Gelenk führe eine Rotation um die Rotationsachse $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^3$ an der Position $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^3$ durch.
- Dann gilt:

$$J_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_j) \\ \mathbf{z}_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Geometrische Berechnung der Jacobi-Matrix

2. Fall: Rotationsgelenk

$$J_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_j) \\ \mathbf{z}_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

■ Manipulator mit n Gelenken

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_1) & \dots & \mathbf{z}_{n-1} \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_{n-1}) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung: Jacobi-Matrix

Vorwärtskinematik:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6, \quad f(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

Jacobi-Matrix:

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

Eigenschaften:

J_f beschreibt die Beziehung zwischen

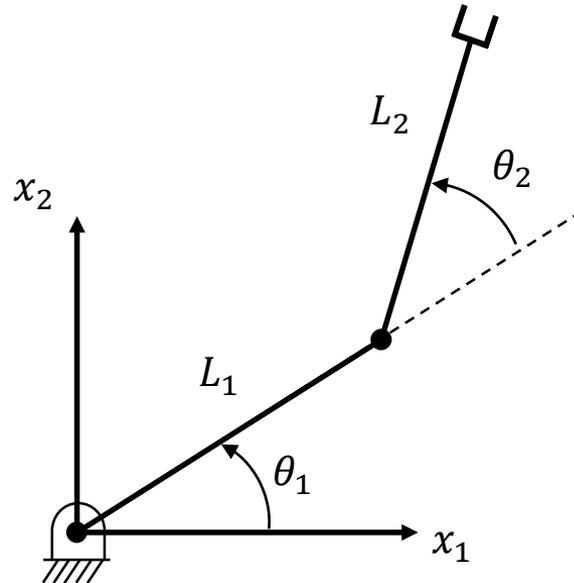
Geschwindigkeit der Gelenkwinkel (n -dimensional)
und Geschwindigkeit des Endeffektors (6-dimensional)

Drehmomente in Gelenken (n -dimensional)
und Kräfte und Momente am Endeffektor (6-dimensional)

Die Jacobi-Matrix ist abhängig von der Gelenkwinkelkonfiguration

Jacobi-Matrix: Beispiel (1)

- Manipulator mit zwei Gelenken θ_1, θ_2
- Gesucht: \dot{x}



Jacobi-Matrix: Beispiel (2)

■ Vorwärtskinematik

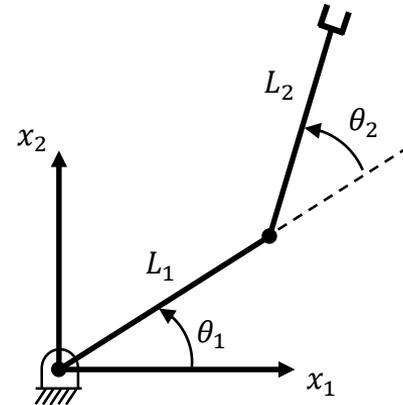
$$\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

■ Geschwindigkeit des Endeffektors

$$\dot{\mathbf{x}} = J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = J_f(\boldsymbol{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$



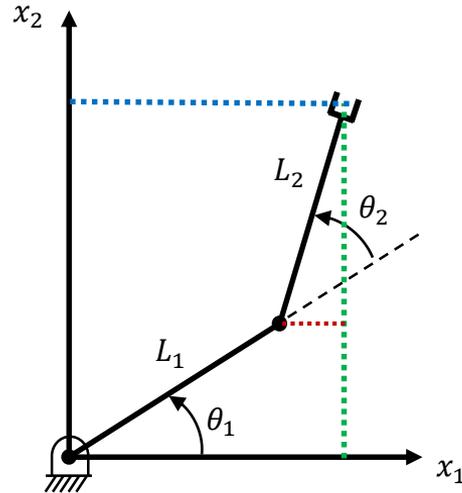
Jacobi-Matrix: Beispiel (3)

■ Vorwärtskinematik

$$x_1 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$



Jacobi-Matrix: Beispiel (4)

■ Vorwärtskinematik

$$\begin{aligned}
 x_1 &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 x_2 &= L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

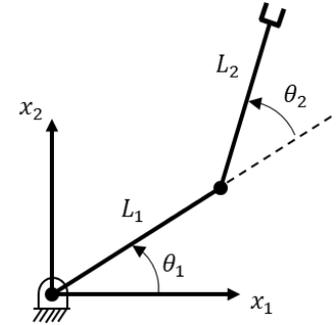
■ Ableitung

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
 \dot{x}_2 &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

■ Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$


 $J_1(\theta)$

 $J_2(\theta)$


Jacobi-Matrix: Beispiel (5)

■ Endeffektor-Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{EEF} = J_1(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_2$$

- Solange $J_1(\boldsymbol{\theta})$ und $J_2(\boldsymbol{\theta})$ **nicht linear abhängig** sind, kann eine \mathbf{v}_{EEF} in jede beliebige Richtung in der x_1x_2 -Ebene erzeugt werden

■ Singularitäten

- $J_1(\theta)$ und $J_2(\theta)$ linear abhängig $\rightarrow J(\theta)$ wird singulär
- z.B. bei $\theta_2 = 0^\circ$
- Die möglichen Bewegungen des Endeffektors sind eingeschränkt

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1) & -L_2 \sin(\theta_1) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1) & L_2 \cos(\theta_1) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -(L_1 + L_2) \sin \theta_1 & -L_2 \sin \theta_1 \\ (L_1 + L_2) \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(L_1 + L_2) \sin \theta_1 & -L_2 \sin \theta_1 \\ (L_1 + L_2) \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

Kinematisches Modell

Kinematische Kette

Denavit-Hartenberg Konvention

Direktes Kinematisches Problem

Beispiele

Jacobi-Matrizen

Singularitäten und Manipulierbarkeit

Repräsentation der Erreichbarkeit

Geometrisches Modell

Einsatzbereiche

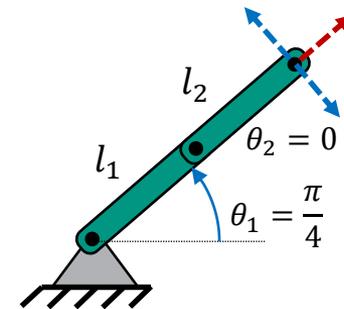
Klassifizierung

Beispiele

Kinematische Singularitäten

- Wenn ein Roboter sich in einer Konfiguration $\theta_{singular} \in C$ befindet, in der er nicht mehr in der Lage ist, sich instantan in eine oder mehr Richtungen zu bewegen, spricht man von einer **kinematischen Singularität**.
- Konfigurationen $\theta_{singular} \in C$, die zu einer kinematischen Singularität führen, nennt man **singulär**.
- Können wir singuläre von nicht singulären Konfigurationen unterscheiden?
→ Über die Jacobi-Matrix

Es existiert keine Gelenkwinkelgeschwindigkeit, die eine Endeffektor-Geschwindigkeit in die **rote Richtung** erzeugt.
⇒ Die Konfiguration ist singulär.



Kinematische Singularitäten: Beispiel

■ Vorwärtskinematik: $\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$

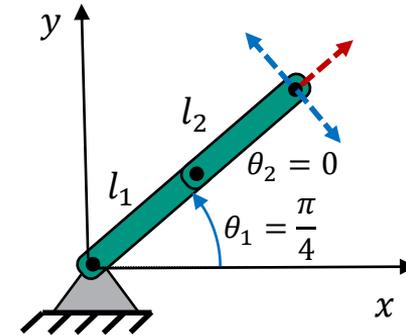
■ Jacobi-Matrix: $J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$

■ Für die singuläre Konfiguration $\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)^T$:

$$J\left(\begin{pmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (J_1, J_2) = \begin{pmatrix} -(l_1 + l_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & -l_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (l_1 + l_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & l_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

■ Erste und zweite Spalte sind linear abhängig

$$J_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \cdot J_2$$



Kinematische Singularitäten: Jacobi-Matrix (1)

Vorwärtskinematik im Geschwindigkeitsraum:

Die Endeffektor-Geschwindigkeit ist eine **lineare Kombination** der Spalten der Jacobi-Matrix.

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right) = (J_1, J_2, \dots, J_n)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (J_1, J_2, \dots, J_n) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} = J_1 \cdot \dot{\theta}_1 + J_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \dots + J_n \cdot \dot{\theta}_n$$

Kinematische Singularitäten: Jacobi-Matrix (2)

Die Endeffektor-Geschwindigkeit ist eine **lineare Kombination** der Spalten der Jacobi-Matrix.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \dots + \mathbf{J}_n \cdot \dot{\theta}_n \qquad \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2 \dots, \mathbf{J}_n)$$

Wenn ein Roboter sich in einer Konfiguration $\boldsymbol{\theta}_{\text{singular}} \in \mathcal{C}$ befindet, in der er nicht mehr in der Lage ist, sich instantan in eine oder mehr Richtungen zu bewegen, spricht man von einer **kinematischen Singularität**.

Kinematische Singularität bedeutet also mathematisch, dass die lineare Kombination der Jacobi-Spalten **nicht den gesamten Endeffektor-Geschwindigkeitsraum aufspannen**.

Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ hat einen Rang kleiner als die Arbeitsraumdimension.

$$\text{rank } \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) < m, \qquad \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$$

Kinematische Singularitäten: Definition

Gegeben seien eine Vorwärtskinematik-Funktion f

$$\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in C \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \in W \subset \mathbb{R}^m$$

und die zugehörige Jacobi-Matrix.

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Eine Konfiguration $\boldsymbol{\theta}_{\text{singular}} \in C$ heißt **singulär**, wenn der Rang der Jacobi-Matrix kleiner als die Dimension des Arbeitsraums ist.

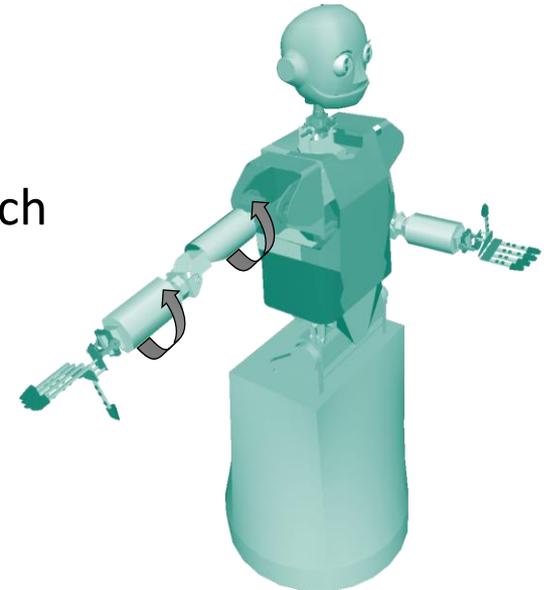
$$\text{rank } J(\boldsymbol{\theta}) < m$$

Singularitäten

■ Definition:

Eine kinematische Kette ist in einer singulären Konfiguration, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix nicht vollen Rang hat, d.h., dass zwei oder mehr Spalten von $J(\boldsymbol{\theta})$ linear abhängig sind.

- Eine singuläre Jacobi-Matrix ist nicht invertierbar
⇒ Bestimmte Endeffektor-Bewegungen sind unmöglich
- In der Umgebung von Singularitäten können große Gelenkgeschwindigkeiten nötig werden, um eine Endeffektor-Geschwindigkeit zu halten



Manipulierbarkeit (Manipulability)

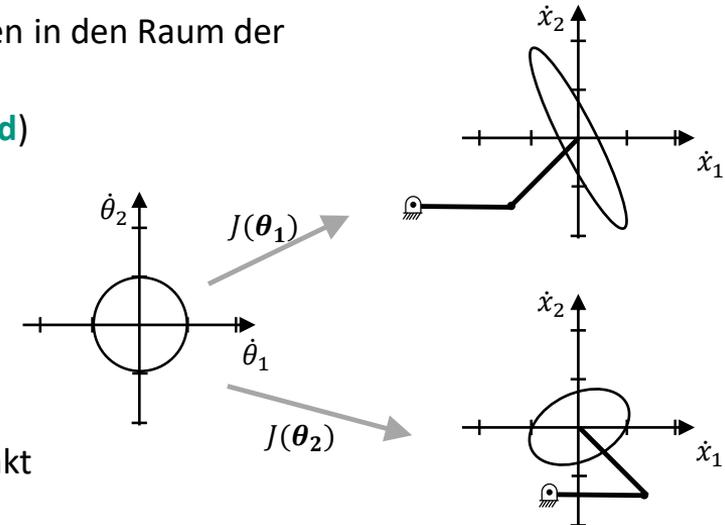
- Ein **Maß** für die Bewegungsfreiheit „**Manipulability**“ des Endeffektors; auch wie „nahe“ eine Konfiguration an einer Singularität

■ Ellipsoid der Manipulierbarkeit

- Beschreibt die Endeffektor-Geschwindigkeiten für Gelenkwinkelgeschwindigkeiten mit $\|\dot{\theta}\| = 1$
- Nutze $J(\theta)$ um **Einheitskreis** der Gelenkwinkel-Geschwindigkeiten in den Raum der Endeffektor-Geschwindigkeiten abzubilden
- Resultat: Ellipsoid der Manipulierbarkeit (**manipulability ellipsoid**)
- Abhängig von der Gelenkwinkelkonfiguration

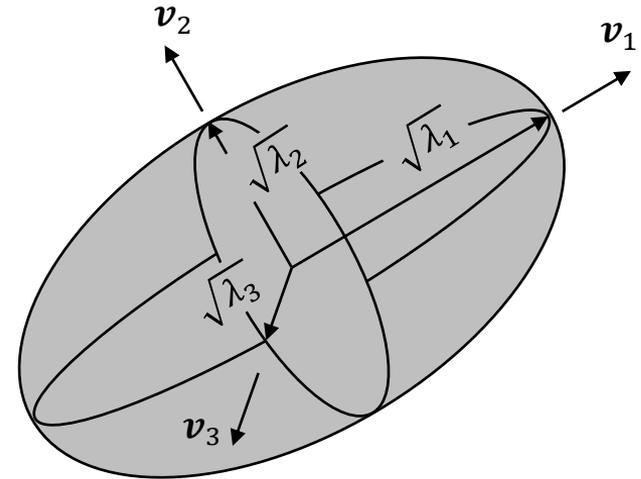
■ Analyse

- Kreis („Dickes Ellipsoid“):** Bewegungen des Endeffektors in alle Richtungen uneingeschränkt möglich
- Degenerierte Fälle (gestauchtes Ellipsoid):** Endeffektor-Bewegung ist in bestimmten Richtungen eingeschränkt



Manipulierbarkeit: Eigenwertanalyse

- Konstruiere $A(\boldsymbol{\theta}) = J(\boldsymbol{\theta}) \cdot J(\boldsymbol{\theta})^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $A(\boldsymbol{\theta})$ ist dann:
 - Quadratisch
 - Symmetrisch
 - Positiv definit
 - Invertierbar
- Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren \boldsymbol{v}_i von A
 - $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$
 - $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$
- Singulärwerte
 - $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$



Ellipsoid der Manipulierbarkeit:
 Geometrische Darstellung der Manipulierbarkeit

Manipulierbarkeit: Berechnung

Skalare Maße für die Manipulierbarkeit

Kleinsten Singulärwert

$$\mu_1(\theta) = \sigma_{\min}(A(\theta))$$

Inverse Kondition

$$\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(A(\theta))}{\sigma_{\max}(A(\theta))}$$

Determinante

$$\mu_3(\theta) = \det A(\theta)$$

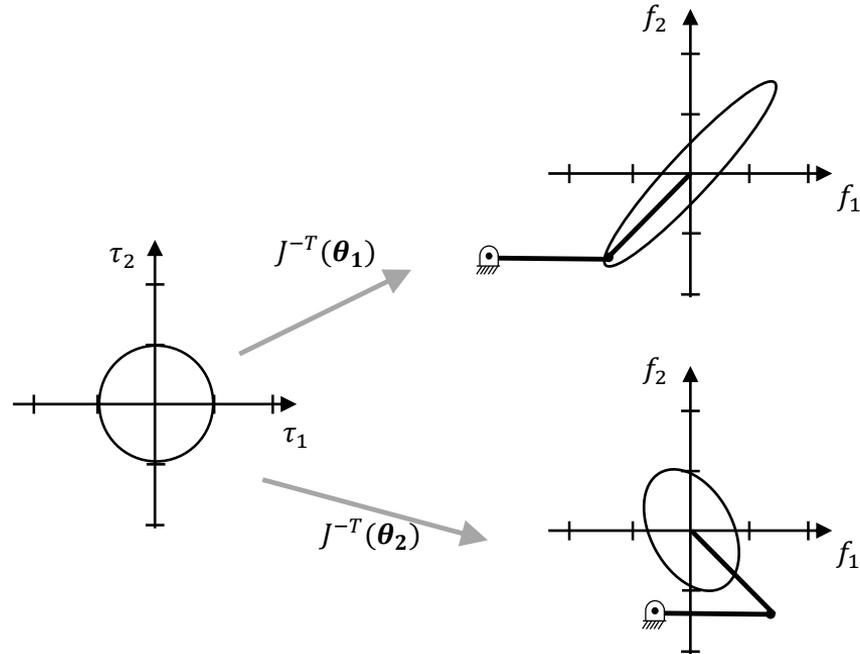
Einsatz:

Analyse von Gelenkwinkelkonfigurationen

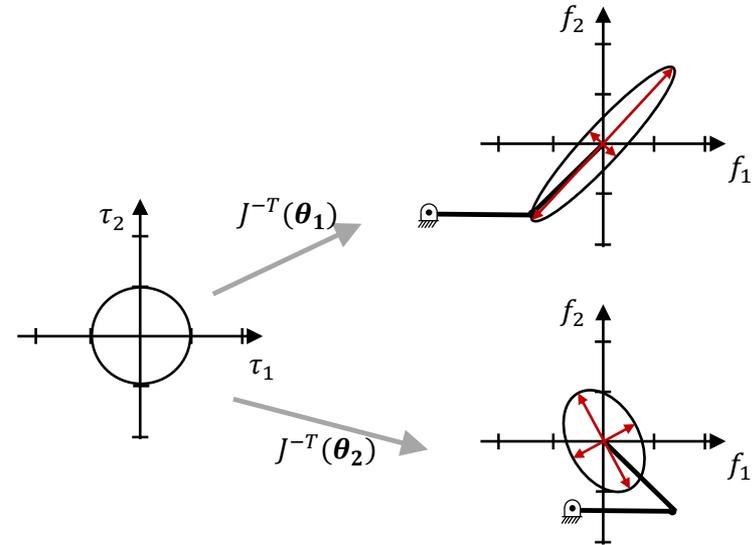
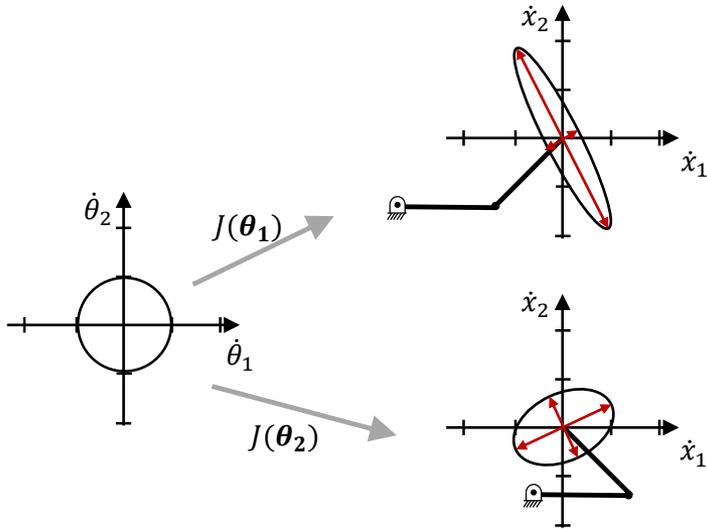
Vermeidung von Singularitäten

Kraft-Ellipsoid

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t) \quad \rightarrow \quad F(t) = J_f^{-T}(\theta(t)) \cdot \tau(t)$$



Manipulability und Kraft Ellipsoid



Inhalt

■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- **Repräsentation der Erreichbarkeit**

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Gelenkwinkelgrenzen

- Ein Roboter mit dem Konfigurationsraum $C \subset \mathbb{R}^n$ deckt i. A. nur einen Teil des zugrundeliegenden \mathbb{R}^n , da es **Gelenkwinkelgrenzen** gibt.
- Für jedes Gelenk gibt es einen minimalen und maximalen Wert

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in C$$

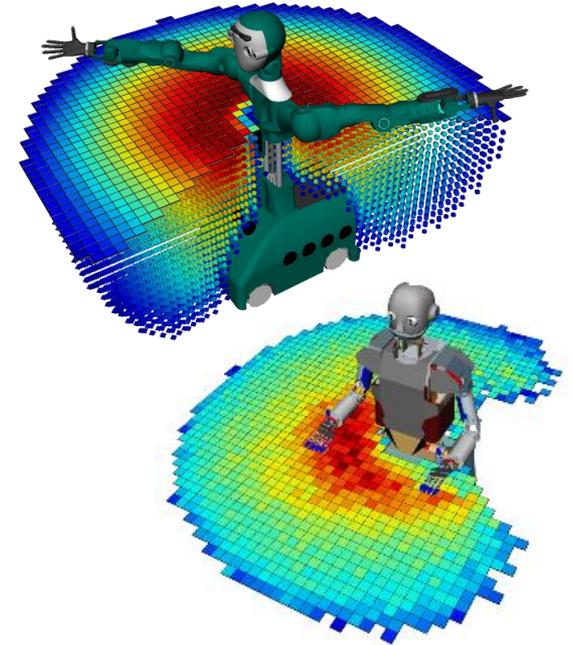
$$\theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}]$$

- Ausnahme: Kontinuierliche Rotationsgelenke (ARMAR-6)
- Gelenkwinkelgrenzen schränken den **erreichbaren Teil des Arbeitsraums** ein

$$W_{\text{reachable}} \subseteq W \subset \mathbb{R}^6$$

Repräsentation der Erreichbarkeit (1)

- Erreichbarer Teil des Arbeitsraums für den Roboter in \mathbb{R}^6
- Approximation durch 6-dimensionales Gitter
- Eintrag in jeder Gitterzelle:
 - **Erreichbarkeit (Reachability):**
Binär: Existiert mindestens eine Gelenkwinkelkonfiguration, so dass der TCP innerhalb der 6D-Gitterzelle liegt?
 - **Manipulierbarkeit (Manipulability):**
Maximaler Manipulierbarkeitswert einer Gitterzelle, z.B. $\mu_1(\theta)$



Visualisierung der Erreichbarkeit bzw. Manipulierbarkeit für die Roboter ARMAR-6 und ARMAR-III

Vahrenkamp, N., Asfour, T. and Dillmann, R., *Efficient Inverse Kinematics Computation based on Reachability Analysis*, International Journal of Humanoid Robotics (IJHR), vol. 9, no. 4, 2012

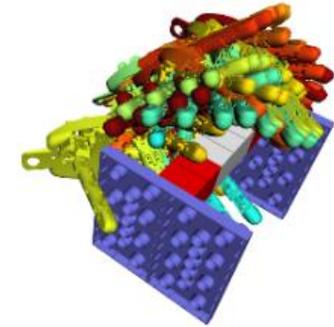
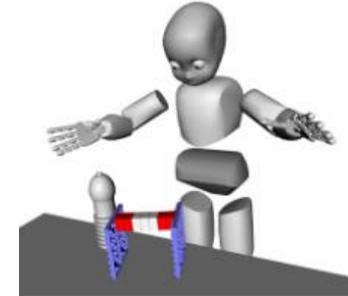
Repräsentation der Erreichbarkeit (2)

■ Erstellung

- Offline-Prozess in Simulation
- Taste alle Gelenkwinkel ab
 - in x Schritten (z.B. $x = 5^\circ$)
 - Bestimme die Lage des TCP über Vorwärtskinematik
 - Bestimme Gitterzelle und setze den Eintrag

■ Anwendung

- Vorberechnete Erreichbarkeitsinformationen
- Schnelle Entscheidung, ob eine Pose mit dem Endeffektor erreichbar ist. Aufwand: $O(1)$
- Kann zur Griffselektion genutzt werden



Nicht erreichbare Griffe können effizient aussortiert werden.

Inhalt

■ Kinematisches Modell

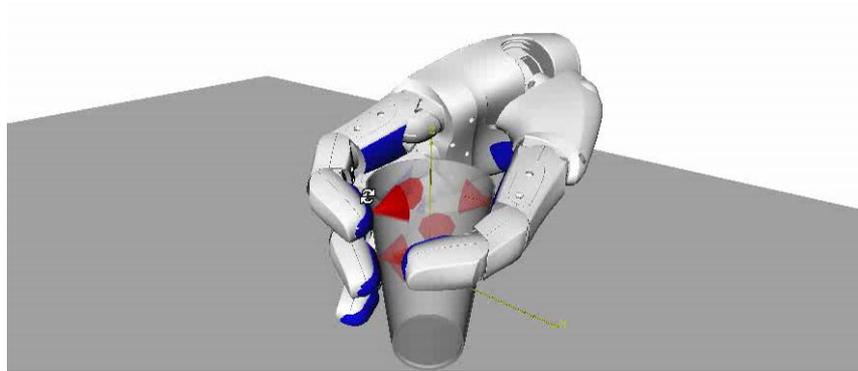
- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

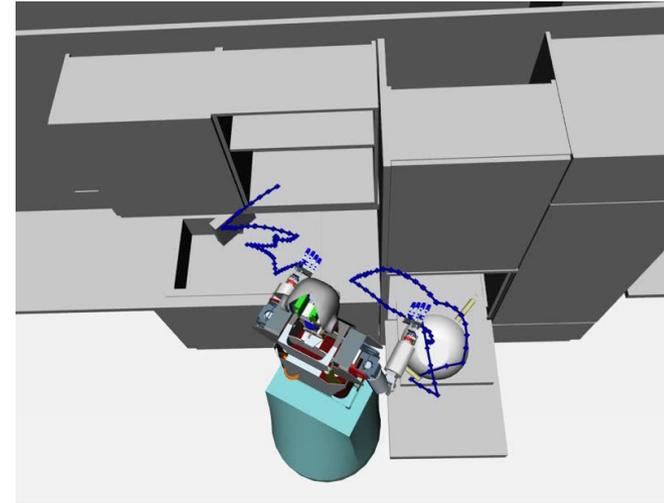
- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Geometrisches Modell: Motivation (1)

■ Kollisions- und Kontaktberechnung

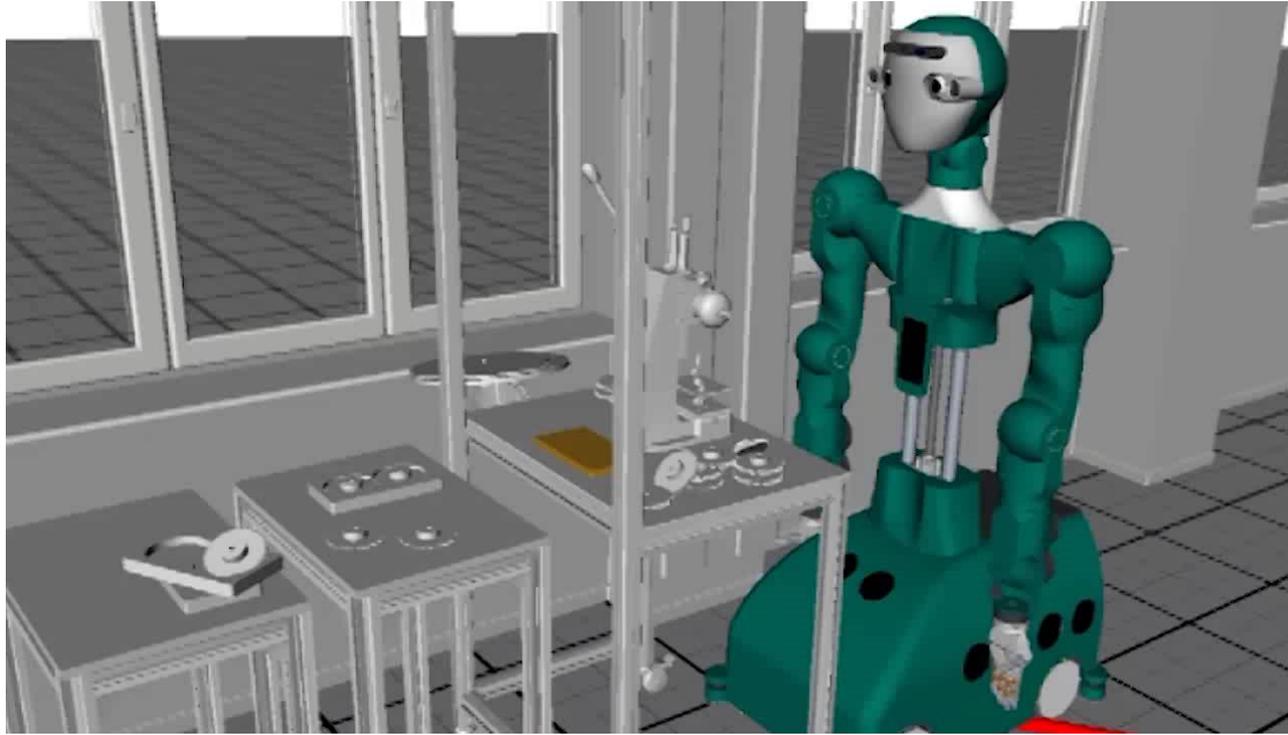


Greifen



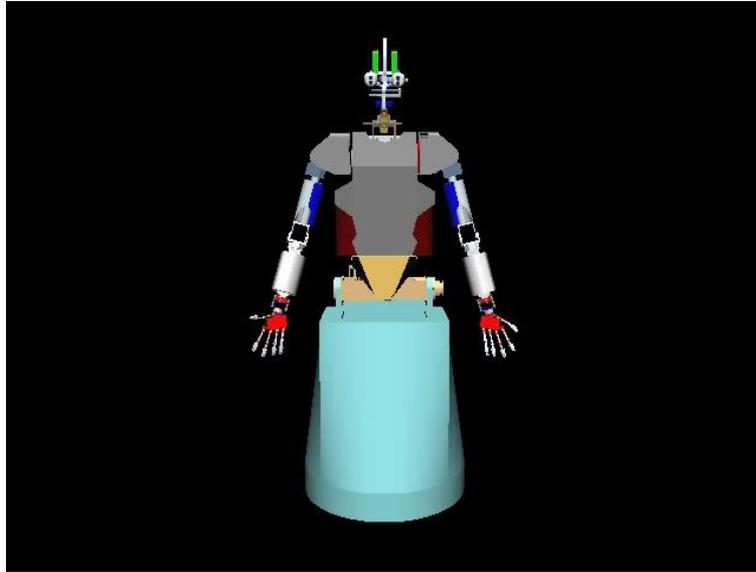
Bewegungsplanung

Geometrisches Modell: Motivation (2)

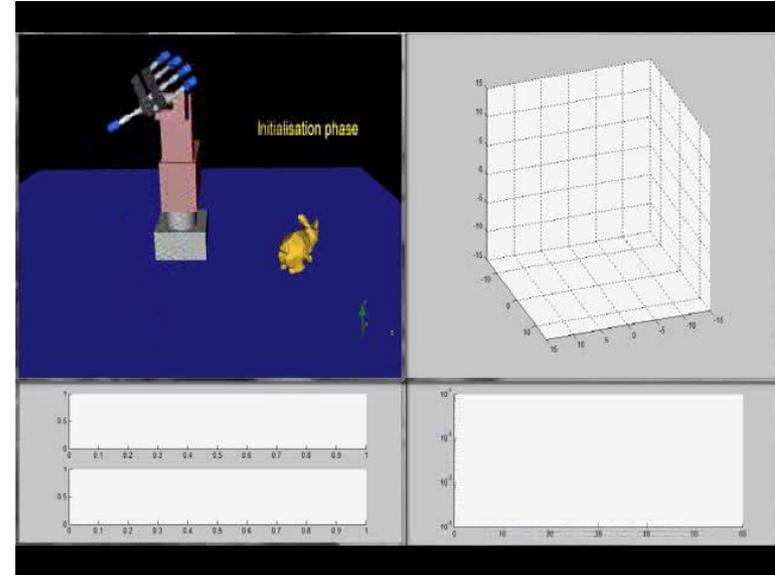


Geometrisches Modell: Motivation (3)

■ Simulation



Imitation

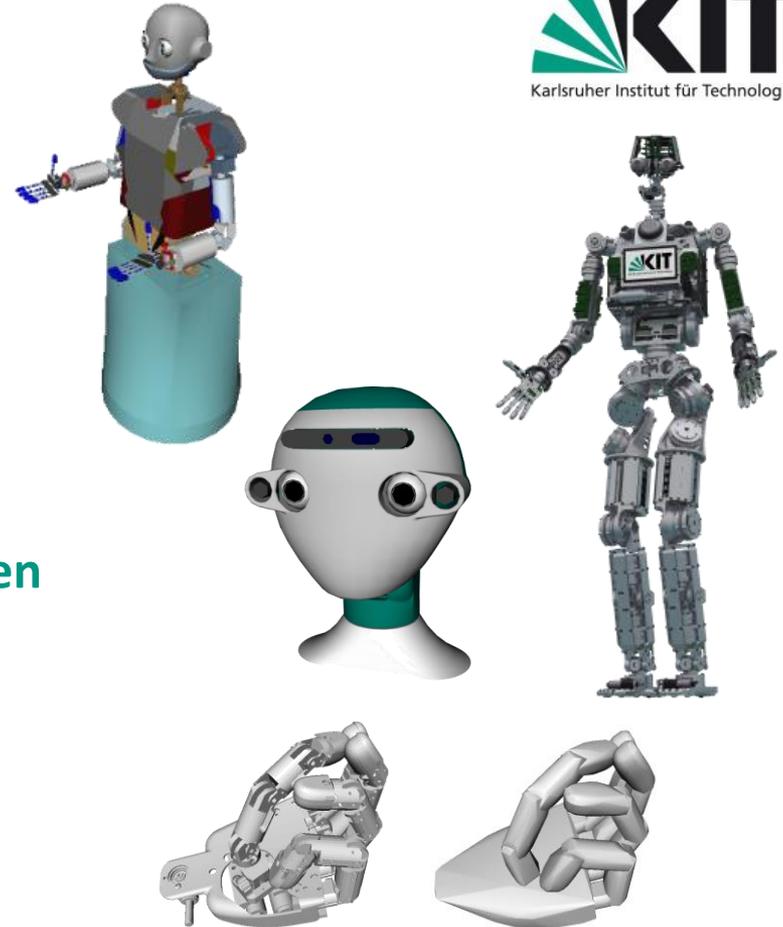


Haptische Exploration

Geometrisches Modell

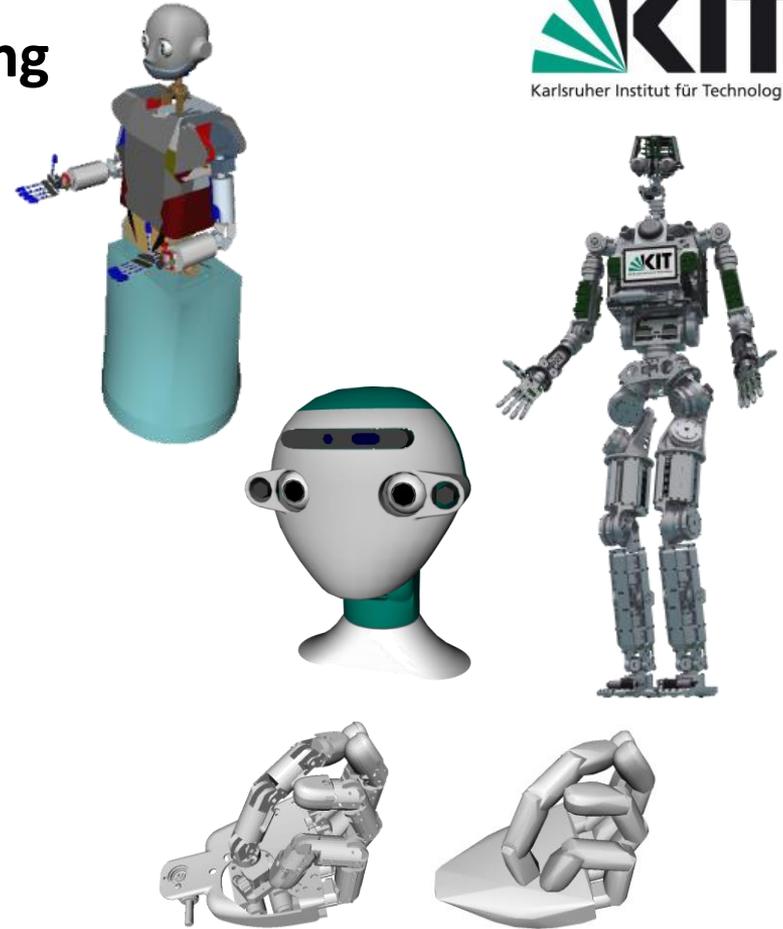
Einsatzbereiche

- Graphische **Darstellung** von Körpern (Visualisierung)
- Ausgangspunkt der **Abstandsmessung** und **Kollisionserkennung**
- Grundlage zur Berechnung der **Bewegungen** von Körpern
- Grundlage zur Ermittlung der wirkenden **Kräfte und Momente**



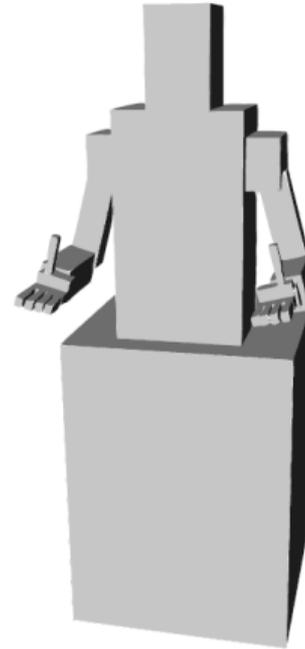
Geometrisches Modell: Klassifizierung

- Klassifizierung nach **Raum**
 - 2D Modelle
 - 3D Modelle
- Klassifizierung nach **Grundprimitiven**
 - Kanten- bzw. Drahtmodelle
 - Flächen- bzw. Oberflächenmodelle
 - Volumenmodell



Blockwelt

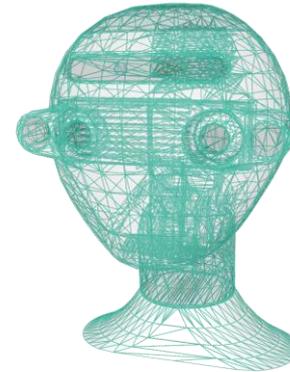
- Die Körper werden durch **einhängende Quader** dargestellt.
- Wird in den ersten Schritten der Kollisionsvermeidung benutzt.
- **Klasse:** 3D, Volumen bzw. Flächen



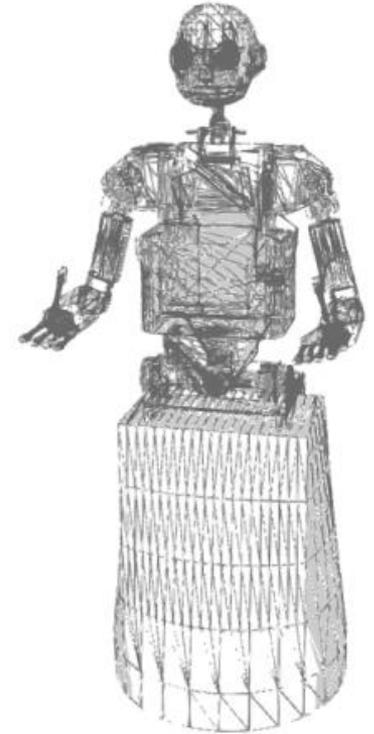
ARMAR-III Blockwelt-Modell

Kantenmodell

- Die Körper werden durch **Polygonzüge** (Kanten) dargestellt.
- Wird zur schnellen Visualisierung benutzt.
- **Klasse:** 3D, Kanten bzw. Flächen



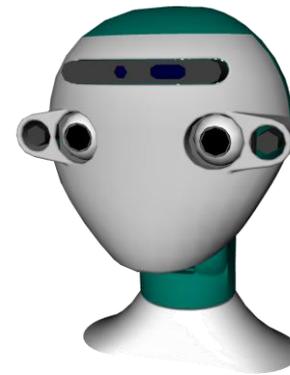
ARMAR-6 Kopfmodell



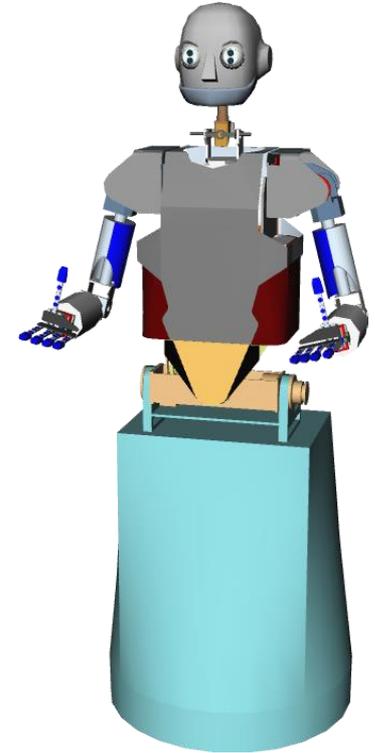
ARMAR-III Kantenmodell

Volumenmodell

- Die Körper werden **genau dargestellt**.
- Genaue Kollisionserkennung möglich
- Darstellung in der Animation.
- **Klasse: 3D, Volumen**



ARMAR-6 Kopfmodell



ARMAR-III Kantenmodell

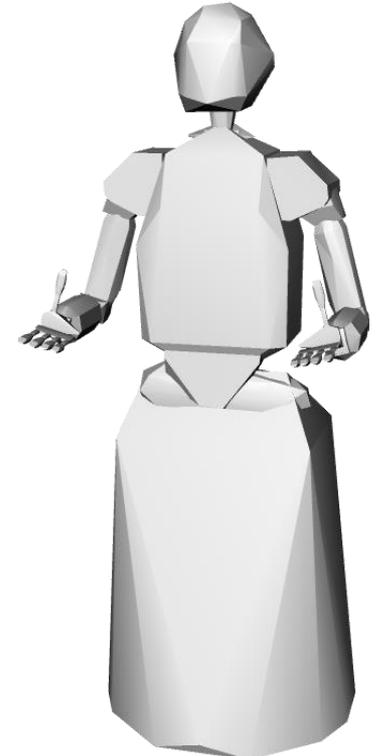
Kollisionsmodell

- Die Körper werden **vereinfacht dargestellt**.
- Schnelle Kollisionserkennung möglich

- **Klasse:** 3D, Volumen



ARMAR-6 Kollisionsmodell



ARMAR-III Kollisionsmodell

■ Kinematisches Modell

- Denavit-Hartenberg Konvention: minimale Anzahl an Parametern zur Beschreibung von Transformation zwischen aufeinanderfolgenden Gelenken
- Direktes Kinematisches Problem: End-Effektor-Pose aus den Gelenkwinkeln berechnen
- Jacobi-Matrix: die Lösung für alles 😊
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Erreichbarkeit

■ Geometrische Modell

- Klassifizierung nach Raum (2D/3D) und Grundprimitiven (Kanten- bzw. Drahtmodelle, Flächen- bzw. Oberflächenmodelle und Volumenmodelle)



Robotics and AI
new chances for agriculture

University Club
Impulse Lectures



Kamaro
Engineering e.V.



JOHN DEERE

RPTU

with subsequent discussion,
snacks and drinks

Tuesday 07.11.23, 18:30 Uhr
KIT Campus South,
Building 1.52,
Gastdozentenhaus

